Dietrich Lortz

1962

Instabilitäten der stationären Konvektionsströmungen endlicher Amplitude

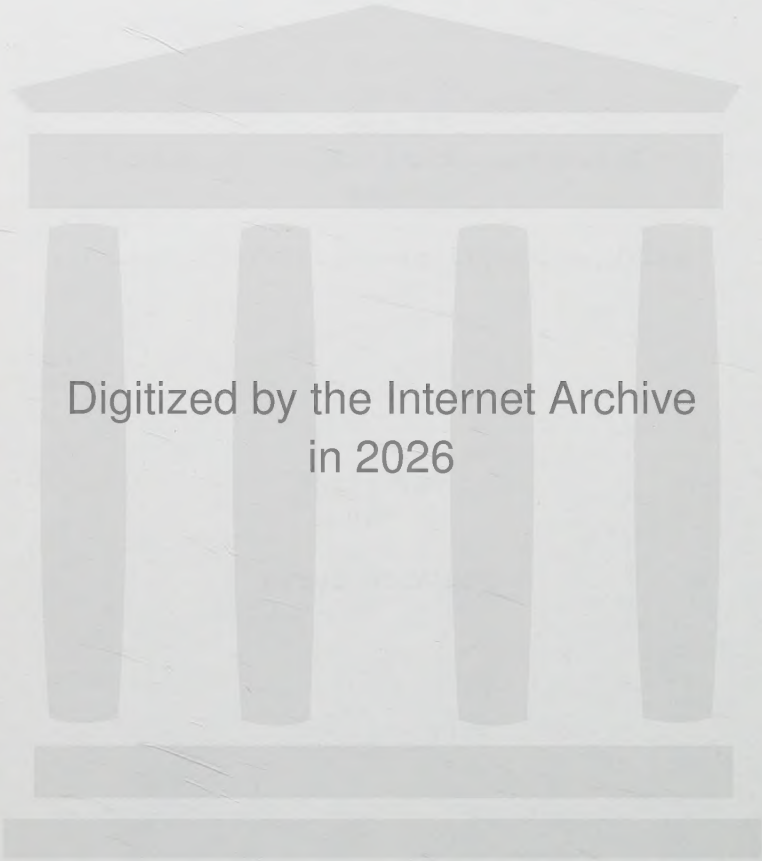
Inaugural - Dissertation
zur
Erlangung der Doktorwürde
der
Naturwissenschaftlichen Fakultät
der

Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt
von

Dietrich Lortz

Dezember 1961


Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41545804_0081

Inhalt

Seite

Einleitung 1
Die Grundgleichungen 2
Die Stabilitätsgleichungen 4
Der Wärmetransport 5
Die Eigenschaft der Operatoren 5
Entwicklung an der Stelle $R=R_c$ 6
Die ungestörten Probleme 8
Berechnung der Eigenwertstörungen $\hat{R}$ und $\hat{\sigma}$ und der Lösungen zweiter Ordnung 12
Eigenwertstörungen zweiter Ordnung 15
Zusammenfassung 28
Danksagung 29
Literaturverzeichnis 29
Anhang 3o
Lebenslauf 35

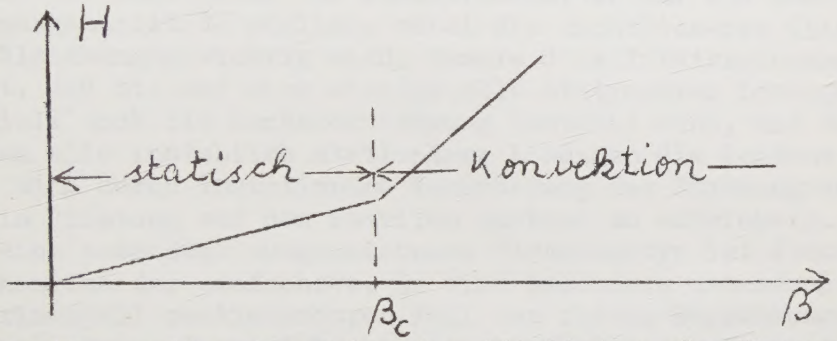
Berichterstatter: Prof. Dr. Schlüter

Tag der mündlichen Prüfung: 28. 2. 1962

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Einleitung

Erhitzt man eine horizontale Flüssigkeits- oder Gasschicht von unten, so wird die Schicht bei Überschreitung eines kritischen Temperaturgradienten thermisch instabil, und es setzt stationäre Konvektion ein. Häufig zeigt das Experiment zylindrische Zellen mit sechseckigem Querschnitt. Die Materie steigt in der Mitte einer solchen Zelle auf und am Rande ab oder umgekehrt. Der Wärmetransport H senkrecht zur Schicht ist größer als im statischen Fall und hängt in der im Diagramm gezeichneten Weise linear vom Temperaturgradienten β ab.



Das Problem soll unter folgenden idealisierenden Voraussetzungen betrachtet werden.

a) Die Schicht sei in der Horizontalen unendlich ausgedehnt und werde durch parallele Ebenen bei $z = -\frac{h}{2}$ und $z = +\frac{h}{2}$ begrenzt, durch die es möglich sein soll, die Schicht an den Begrenzungsebenen auf konstanter Temperatur T_1 bzw. T_2 zu halten.

b) Die kinematische Viskosität, die Temperaturleitfähigkeit und der Volumenausdehnungskoeffizient sollen nicht von der Temperatur abhängen.

c) Bei der Bewegung der Flüssigkeit an den Begrenzungsebenen werden zwei Fälle unterschieden: Entweder die Flüssigkeit haftet am Rand ("feste" Grenzebene), so daß dort keine Bewegung stattfindet, oder es wirken am Rand keine Scherkräfte in horizontaler Richtung ("freie" Grenzebene).

Im folgenden wird versucht, die nichtlinearen hydrodynamischen Gleichungen unter diesen Voraussetzungen näherungsweise zu lösen. Dabei zeigt sich, daß das stationäre Strömungsfeld durch die physikalisch gegebenen Randbedingungen nicht eindeutig bestimmt ist. Dadurch wird eine Stabilitätsrechnung erforderlich, die zwar auf ein lineares Gleichungssystem in den Störungen führt, das sich aber ebenfalls nicht geschlos-

sen integrieren läßt. Beide Gleichungssysteme werden simultan störungsrechnerisch behandelt.
Die ungestörten Gleichungen, die nur für infinitesimale Strömungsamplitude gelten, sind geschlossen gelöst [1]. Sie liefern den richtigen Wert für den kritischen Temperaturgradienten, aber eine viel zu große Klasse von Lösungsfunktionen, unter denen auch die erwähnten Sechseckzellen sind. Verschiedene Strömungstypen wurden im einzelnen schon viel diskutiert [2], [4], aber bisher gelang weder die allgemeine Behandlung der Lösungsmannigfaltigkeit, noch eine systematische Stabilitätsrechnung. Eine Stabilitätsunterscheidung ist ebenso wie die Berechnung des Wärmetransportes nur für endliche Strömungsamplitude möglich, wobei die nichtlinearen Glieder der Gleichungen wichtig sind. Unsere Stabilitätsrechnung zeigt, daß bis auf eine einzige alle stationären Lösungen und speziell auch die Sechseckströmung instabil sind, und daß außerdem alle instabilen stationären Lösungen die Tendenz zeigen, sich durch instationäre Veränderung des Strömungszustandes in Richtung auf den stabilen Zustand zu entwickeln. Dieser eine besonders ausgezeichnete Strömungstyp ist formal und anschaulich der einfachste. Er wird besonders untersucht. Im experimentell realisierbaren Fall der festen Begrenzungsebenen war eine umfangreiche numerische Rechnung erforderlich.

Die Grundgleichungen.

Das Strömungsfeld in der Schicht wird durch die Navier-Stokesschen Differentialgleichungen und die Kontinuitätsgleichung

$$(1)\qquad \varrho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \varrho u_j \partial_j u_i = -\partial_i p - \varrho g \lambda_i + \varrho \nu \Delta u_i$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \partial_j \varrho u_j = 0$$

beschrieben.
u_i Komponente der Geschwindigkeit $\mathfrak{w}$, i= 1, 2, 3, ∂_i Ableitung in Richtung x_i, ϱ Dichte, p Druck, ν kinematische Viskosität. g ist die Erdbeschleunigung und $\vec{\lambda} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ der in Richtung der Vertikalen weisende Einheitsvektor.
Die Energiebilanz laute

$$(2)\qquad \frac{\partial T}{\partial t} + u_j \partial_j T = \varkappa \Delta T$$

Hierin ist T die Temperatur und die Konstante $\varkappa$ die Temperaturleitfähigkeit. Die Wärmeerzeugung durch Dissipation ist vernachlässigt worden.
Im allen Gleichungen soll die Summationskonvention gelten, falls es nicht anders angemerkt ist.
Die Dichteänderung durch thermische Ausdehnung

$$\rho = \rho_0 \left[1 - \alpha (T - T_0) \right] ,$$

wo α der Volumenausdehnungskoeffizient ist, soll nur insofern in (1) berücksichtigt werden als sie das Gravitationsglied $-\rho g \lambda_i$ beeinflußt. Alle Autoren, die sich bisher mit dem Phänomen der Zellularkonvektion theoretisch befaßt haben, gingen von dieser Annahme aus.
Dann erhält man die Gleichungen

$$(3a) \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \partial_j u_i = - \partial_i \left(\frac{p}{\rho_0} + g x_j \lambda_j \right) + \gamma (T - T_0) \lambda_i + \nu \Delta u_i$$

$$(3b) \quad \partial_j u_j = 0 , \qquad \gamma = \alpha g .$$

$-\beta$ ist ein örtlich konstanter negativer Temperaturgradient mit der Richtung $\vec{\lambda}$. Damm wird die Temperatur zerlegt in einen statischen Anteil $T_0 - \beta x_j \lambda_j$,der linearem Temperaturabfall entsprechen würde, und in einen Anteil Θ, der die Abweichung durch Konvektion angibt.

$$T = T_0 - \beta x_j \lambda_j + \Theta$$

Setzt mam dies in (2) und (3) ein, so erhält man das gekoppelte nichtlineare Differentialgleichungssystem

$$(4) \quad \begin{aligned} &\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \partial_j u_i = - \partial_i \omega + \gamma \Theta \lambda_i + \nu \Delta u_i , \\ &\frac{\partial \Theta}{\partial t} + u_j \partial_j \Theta = \beta u_j \lambda_j + \varkappa \Delta \Theta , \quad \partial_j u_j = 0 \end{aligned}$$

mit der Abkürzung $\omega = \frac{p}{\rho_0} + g x_j \lambda_j - \frac{1}{2} \beta \gamma x_\kappa \lambda_\kappa x_j \lambda_j$.
Die Gleichungen (4) müssen in dimensionsloser Form geschrieben werden. Dazu setzt man

$$u_i = \frac{\varkappa}{h} u_i' , \qquad \Theta = \frac{\nu \varkappa}{\gamma h^3} \Theta' ,$$
$$t = \frac{h^2}{\varkappa} t' , \qquad x_i = h x_i'$$

und führt die Schichtdicke h als charakteristische Länge ein. Geht man mit diesen Substitutionen in (4) ein, so ergibt sich

$$(5) \quad \begin{aligned} &P \frac{\partial u_i}{\partial t} + P u_j \partial_j u_i = - \partial_i \omega + \Theta \lambda_i + \Delta u_i , \\ &\frac{\partial \Theta}{\partial t} + u_j \partial_j \Theta = R u_j \lambda_j + \Delta \Theta , \end{aligned}$$

$P' = \frac{1}{P} = \frac{\nu}{\varkappa}$ ist die Prandtlzahl,

$R = \frac{\beta \gamma h^4}{\nu \varkappa}$ die Rayleighzahl.

Die Striche an den Variablen sind nachträglich wieder fortgelassen worden.
Zusammen mit $\partial_j u_j = 0$ und den Randbedingungen stellt (5) ein vollständiges Differentialgleichungssystem dar zur Bestimmung der fünf unbekannten Funktionen u_i, Θ, P.
Die Randbedingungen lauten $u_z = \Theta = 0$ an den Begrenzungsebenen. Im Fall" frei" wirken am Rand keine Scherkräfte. Dann gilt $\partial_z u_x = \partial_z u_y = 0$ oder mit (3b) $\partial_{zz}^2 u_z = 0$. Im Fall "fest"ist am Rand $u_x = u_y = 0$ oder $\partial_z u_z = 0$.

Die Stabilitätsgleichungen.

Stationäre Lösungen von (5) zu einem bestimmten Wert R können nur dann in der Natur realisiert werden, wenn Abweichungen von diesen stationären Lösungen nicht zeitlich anwachsen. Es ist also zu prüfen, ob die Strömung gegenüber irgendwelchen Störungen stabil ist. Um festzustellen, welchen Gleichungen diese Störungen genügen müssen, überlagert man der stationären Lösung u_i, Θ eine instationäre Störung $\tilde{u}_i$, $\tilde{\Theta}$ und verlangt daß, u_i, Θ und auch $u_i + \tilde{u}_i$, $\Theta + \tilde{\Theta}$ dem nichtlinearen Gleichungssystem (5) genügen sollen. Beschränkt man sich auf infinitesimale Störungen, so wird das entstehende Gleichungssystem linear in $\tilde{u}_i$, $\tilde{\Theta}$, so daß die Zeitabhängigkeit sich mit dem Exponentialansatz

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{u}_i = \sigma \tilde{u}_i \quad , \quad \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\Theta} = \sigma \tilde{\Theta}$$

schreiben läßt. σ ist die zeitliche Anwachsrate.

$$\sigma P \tilde{u}_i + P\left(\tilde{u}_j \partial_j u_i + u_j \partial_j \tilde{u}_i\right) = -\partial_i \tilde{\omega} + \tilde{\Theta} \lambda_i + \Delta \tilde{u}_i$$

$$\text{(6)} \quad \sigma \tilde{\Theta} + \tilde{u}_j \partial_j \Theta + u_j \partial_j \tilde{\Theta} = R \tilde{u}_j \lambda_j + \Delta \tilde{\Theta}$$

$$\partial_j \tilde{u}_j = 0$$

Die stationären Lösungnn u_i, Θ treten als Koeffizienten auf. R hat einen zu den stationären Lösungen gehörigen festen Wert, während die Anwachsrate σ jetzt Eigenwert ist. Sie wird i.a. von den Koeffizienten u_i, Θ der Differentialgleichung abhängen. Das Stabilitätskriterium lautet : Existieren bei vorgegebenen Funktionen u_i, Θ Lösungen von (6), die zu positivem Realteil des Eigenwertes σ gehören, so sind die u_i, Θ instabil. Sind dagegen die Realteile aller Eigenwerte von (6) negativ, so sind die Lösungen u_i, Θ stabil.

Der Wärmetransport.

Da die dissipativen Glieder in der Energiebilanz vernachlässigt wurden, ist der durch die Konvektion zusätzlich hervorgerufene Wärmestrom H_i divergenzfrei. $\partial_j H_j = 0$. Dies besagt gerade die Gleichung

$$u_j \partial_j \Theta = R\, u_j \lambda_j + \Delta \Theta$$

bzw. $\partial_j u_j \Theta - R\, \partial_j u_j \chi_\kappa \lambda_\kappa - \partial_j \partial_j \Theta = 0$ mit

$$(7) \qquad H_j = u_j (\Theta - R \chi_\kappa \lambda_\kappa) - \partial_j \Theta \,.$$

Hierin stellt das erste Glied den konvektiv transportierten Wärmeinhalt dar, und das zweite kommt durch Wärmeleitung im Temperaturfeld Θ zustande.
Horizontale Mittelung über H_z ergibt

$$(8) \qquad \overline{H_z} = \overline{u_z \Theta} - \partial_z \overline{\Theta} \,.$$

Denn es ist $\overline{u_z} = 0$, da wegen $\partial_j u_j = 0$ im Mittel nach oben ebensoviel Materie strömt wie nach unten.
$\overline{H_z}$ hängt nicht von z ab, weil die Schicht unendlich ausgedehnt ist und im Mittel keine Wärme horizontal strömt. Am Rand verschwindet Θ, nicht aber $\partial_z \Theta$, so daß dort nur der Leitungsanteil zu $\overline{H_z}$ beiträgt.

Die Eigenschaft der Operatoren.

$$D_{1i}(u, \Theta) = -\partial_i \omega + \Theta \lambda_i + \Delta u_i$$
$$D_2(u, \Theta) = \mathring{R}\, u_j \lambda_j + \Delta \Theta$$

Wir behaupten, daß die Operatoren D folgende Eigenschaft der Selbstadjungiertheit besitzen.

$$(9) \quad \begin{aligned} &\left(\Theta', D_2(u, \Theta)\right) + \mathring{R}\left(u_i', D_{1i}(u, \Theta)\right) = \\ &\left(\Theta, D_2(u', \Theta')\right) + \mathring{R}\left(u_i, D_{1i}(u', \Theta')\right). \end{aligned}$$

Hierbei sind alle Funktionen reell angenommen worden und wieder $\partial_j u_j = \partial_j u_j' = 0$. Im ganzen Schichtgebiet sollen die auftretenden Funktionen endlich bleiben und an den Begrenzungsebenen den oben erwähnten Randbedingungen genügen. Die durch $(\ldots, \ldots)$ angedeutete Mittelung wird über das gesamte Schichtvolumen durchgeführt. Bei Anwendung des Gaußschen bzw. Greenschen Satzes treten dann die Oberflächenintegrale

$$\iint_F u_i' \omega \, df_i, \quad \iint_F \left(u_i' \frac{\partial u_i}{\partial n} - u_i \frac{\partial u_i'}{\partial n}\right) df, \quad \iint_F \left(\Theta' \frac{\partial \Theta}{\partial n} - \Theta \frac{\partial \Theta'}{\partial n}\right) df$$

auf. Als Gebiet betrachten wir einen Zylinder, aus dem senkrecht zu den Mantellinien durch die Begrenzungsebenen ein endliches Gebiet G ausgeschnitten wird. Läßt man den Zylinderquerschnitt beliebig groß werden, so verschwinden bei der Mittelung die Beiträge vom Mantel zu den Oberflächenintegralen, weil die Manteloberfläche schwächer als das Volumen von G gegen unendlich strebt und die auftretenden Funktionen als überall endlich angenommen werden. An den Begrenzungsebenen sollen u_z, u_z', Θ, Θ' und außerdem entweder u_x, u_x', u_y, u_y' oder $\partial_z u_x$, $\partial_z u_x'$, $\partial_z u_y$, $\partial_z u_y'$ verschwinden. Also gibt es keine Beiträge zu den Oberflächenintegralen. Es gelten dann die Gleichungen

$$(\Theta', \Delta\Theta) = (\Theta, \Delta\Theta'), \quad (u_i', \Delta u_i) = (u_i, \Delta u_i'),$$
$$(u_i', \partial_i \omega) = (u_i, \partial_i \omega') = 0,$$

so daß tatsächlich die Behauptung (9) erwiesen ist.

Entwicklung an der Stelle $R = R_c$.

Die stationären Gleichungen

$$P u_j \partial_j u_i = -\partial_i \omega + \Theta \lambda_i + \Delta u_i$$
$$u_j \partial_j \Theta = R u_j \lambda_j + \Delta\Theta \qquad (10)$$

und die Stabilitätsgleichungen (6) wollen wir störungsrechnerisch für kleine u_i, Θ, d.h. für geringe Abweichungen von der kritischen Rayleighzahl R_c, bei der die Konvektion einsetzt, behandeln. Die quadratischen Glieder in (10) und die von u_i, Θ abhängigen Glieder in (6) werden als Störglieder in den Differentialgleichungen angesehen. Die ungestörten stationären und die ungestörten Stabilitätsgleichungen lauten

$$0 = -\partial_i \hat{\omega} + \hat{\Theta} \lambda_i + \Delta \hat{u}_i = D_{1i}(\hat{\omega}, \hat{\Theta})$$
$$0 = \mathring{R} \hat{u}_j \lambda_j + \Delta \hat{\Theta} = D_2(\hat{\omega}, \hat{\Theta}), \qquad (11)$$

$$\mathring{\sigma} P \hat{\tilde{u}}_i = -\partial_i \hat{\tilde{\omega}} + \hat{\tilde{\Theta}} \lambda_i + \Delta \hat{\tilde{u}}_i = D_{1i}(\hat{\tilde{\omega}}, \hat{\tilde{\Theta}})$$
$$\mathring{\sigma} \hat{\tilde{\Theta}} = \mathring{R} \hat{\tilde{u}}_j \lambda_j + \Delta \hat{\tilde{\Theta}} = D_2(\hat{\tilde{\omega}}, \hat{\tilde{\Theta}}). \qquad (12)$$

Sie sind homogen linear und mit konstanten Koeffizienten. Ihre Lösungen und das Verhalten der Eigenwerte $\mathring{R}$, $\mathring{\sigma}$ sind seit langem bekannt [1].

In (11) und (12) ist ein kontinuierlich veränderlicher Amplitudenparameter ε frei. Wir versuchen durch den Ansatz

$$R = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon^\nu \overset{\nu}{R}$$

$$(13) \qquad u_i = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon^\nu \overset{\nu}{u}_i \,, \quad \Theta = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^\nu \overset{\nu}{\Theta}$$

ε formal als Störungsparameter einzuführen und dadurch Näherungslösungen von (1o) zu finden. Die entsprechende Entwicklung für $\overline{H_z}$ lautet

$$(14) \qquad \overline{H_z} = \varepsilon\, \partial_z \overset{1}{\Theta} + \varepsilon^2 \left[\overline{\overset{1}{u}_z \overset{1}{\Theta}} - \partial_z \overset{2}{\Theta} \right] + \varepsilon^3 \ldots$$

Wie unten ersichtlich sein wird, verschwindet stets $\overline{\Theta}$, so daß $\overline{H_z}$ quadratisch mit der Amplitude beginnt. Geht man mit dem Näherungsansatz (13) in das nichtlineare Differentialgleichungssystem (1o) ein und ordnet nach Potenzen von ε, so erhält man eine Folge von inhomogenen Differentialgleichungen.

$$(15) \qquad \begin{aligned} P \sum_{\nu=1}^{m-1} \overset{\nu}{u}_j\, \partial_j \overset{m-\nu}{u}_i &= D_{1i}(\overset{m}{u}, \overset{m}{\Theta}) \\ -\sum_{\nu=1}^{m-1} \overset{\nu}{R}\, \overset{m-\nu}{u}_j\, \lambda_j + \sum_{\nu=1}^{m-1} \overset{\nu}{u}_j\, \partial_j \overset{m-\nu}{\Theta} &= D_2(\overset{m}{u}, \overset{m}{\Theta}) \,, \end{aligned}$$

aus denen sich sukzessive bei Kenntnis der Eigenwertstörung (m-1)-ter Ordnung und der Lösungsfunktionen bis zur m-tenOrdnung die Eigenwertstörung $\overset{m}{R}$ und die Funktionen $\overset{m+1}{u}_i$, $\overset{m+1}{\Theta}$ berechnen lassen. Allerdings sind die $\overset{m}{u}_i$, $\overset{m}{\Theta}$ jeweils nur bis auf Vielfache der $\overset{1}{u}_i$, $\overset{1}{\Theta}$ bestimmt, und diese Unbestimmtheit pflanzt sich in den Inhomogenitäten und Eigenwertstörungen der höheren Ordnungen fort. Falls die Entwicklung konvergiert, läßt sich jedoch zeigen, daß die Beziehung zwischen $R = \sum \varepsilon^\nu \overset{\nu}{R}$ und $u_i = \sum \varepsilon^\nu \overset{\nu}{u}_i$, $\Theta = \sum \varepsilon^\nu \overset{\nu}{\Theta}$ von dieser Unbestimmtheit unbeeinflußt bleibt. Dies ist dadurch möglich, daß bei festem R der Parameter ε entsprechend unbestimmt ist. Mann kann daher den $\overset{m}{u}_i$, $\overset{m}{\Theta}$ willkürliche Zusatzbedingungen auferlegen. Wir werden fordern, daß $(\overset{m}{u}_z, \overset{m}{\Theta}) = 0, m = 2, 3, \ldots$ ist und erreichen dadurch, daß die Eigenwertstörung $\overset{m}{R}$ von den niedrigeren Eigenwertstörungen nicht explizit abhängt.

Die Amplitude ε soll nun Störparameter bei der Behandlung des linearen homogenen Stabilitätsproblems (6) werden. Wir machen für die Lösungen und Eigenwerte von (6) den Näherungsansatz

$$(16) \qquad \tilde{u}_i = \sum_{\nu=0}^{m} \varepsilon^\nu \overset{\nu+1}{\tilde{u}}_i \,, \quad \tilde{\Theta} = \sum_{\nu=0}^{m} \varepsilon^\nu \overset{\nu+1}{\tilde{\Theta}} \,, \quad \sigma = \sum_{\nu=0}^{m} \varepsilon^\nu \overset{\nu}{\sigma} \,.$$

Setzt man die Näherungen (1o) und (16) in (6) ein, so er-

geben sich, nach Potenzen von ε geordnet, die inhomogenen Differentialgleichungen

$$P\sum_{\nu=0}^{m-1}\overset{\nu}{\sigma}\,\overset{m-\nu}{\tilde{u}_i} + P\sum_{\nu=1}^{m-1}\overset{\nu}{u}_j\,\partial_j\,\overset{m-\nu}{\tilde{u}_i} + P\sum_{\nu=1}^{m-1}\overset{\nu}{\tilde{u}}_j\,\partial_j\,\overset{m-\nu}{u_i} = D_{1i}\Big(\overset{m}{\tilde{w}},\overset{m}{\tilde{\Theta}}\Big)$$

$$(17)\qquad -\sum_{\nu=1}^{m-1}R\,\overset{\nu}{\tilde{u}}_j\,\lambda_j + \sum_{\nu=0}^{m-1}\overset{\nu}{\sigma}\,\overset{m-\nu}{\tilde{\Theta}} + \sum_{\nu=1}^{m-1}\overset{\nu}{u}_j\,\partial_j\,\overset{m-\nu}{\tilde{\Theta}} + \sum_{\nu=1}^{m-1}\overset{\nu}{\tilde{u}}_j\,\partial_j\,\overset{m-\nu}{\Theta} = D_2\Big(\overset{m}{\tilde{w}},\overset{m}{\tilde{\Theta}}\Big)$$

Dadurch, daß sowohl die stationären Lösungen als auch die Lösungen der Stabilitätsgleichungen nach Potenzen desselben Parameters ε entwickelt worden sind, hat man den Vorteil, daß man die Gleichungen (15) und (17) für festes m simultan behandeln kann. Dies wird sich in der späteren praktischen Durchführung der Rechnung als günstig erweisen. Man bestimmt nach (15) die stationären Lösungen und Eigenwertstörungen bis zur m-ten Ordnung und kann dann nach (17) die Anwachsrate ebenfalls bis zur m-ten Ordnung berechnen.
Um die Störungsrechnung praktisch durchführen zu können, ist die genaue Kenntnis derLösungen der ungestörten Probleme und das Verhalten ihrer Eigenwerte nötig.

Die ungestörten Probleme.

Wie man sieht, gehen die stationären Gleichungen erster Ordnung (11) aus den Stabilitätsgleichungen erster Ordnung (12) hervor, wenn man $\overset{\circ}{\sigma}=0$ wählt. Deshalb genügt es, die Gleichungen (12) zu diskutieren.
Wegen der Selbstadjungiertheit der rechten Seite von (12) läßt sich analog der Schlußweise bei nur einer Gleichung zeigen, daß stets $\overset{\circ}{\sigma}$ reell ist.*)
Wir nehmen an, daß in der Gleichung

$$(18)\qquad \begin{aligned} \overset{\circ}{\sigma}\,P\,\hat{\tilde{u}}_i &= D_{1i}\big(\hat{\tilde{w}},\hat{\tilde{\Theta}}\big)\\ \overset{\circ}{\sigma}\,\hat{\tilde{\Theta}} &= D_2\big(\hat{\tilde{w}},\hat{\tilde{\Theta}}\big)\end{aligned}$$

$\overset{\circ}{\sigma}$ und damit $\hat{\tilde{u}}_i$, $\hat{\tilde{\Theta}}$ komplex sind. Dann erfüllen die konjugiert komplexen Lösungen $\hat{\tilde{u}}_i^*$, $\hat{\tilde{\Theta}}^*$mit dem Eigenwert $\overset{\circ}{\sigma}{}^*$die Gleichungen

$$(19)\qquad \begin{aligned} \overset{\circ}{\sigma}{}^*\,P\,\hat{\tilde{u}}_i^* &= D_{1i}\big(\hat{\tilde{w}}^*,\hat{\tilde{\Theta}}^*\big)\\ \overset{\circ}{\sigma}{}^*\,\hat{\tilde{\Theta}}^* &= D_2\big(\hat{\tilde{w}}^*,\hat{\tilde{\Theta}}^*\big)\end{aligned}$$

Multiplikation von (18) mit $\overset{\circ}{R}\hat{\tilde{u}}_i^*$ bzw. $\hat{\tilde{\Theta}}^*$, von (19) mit $\overset{\circ}{R}\hat{\tilde{u}}_i$ bzw. $\hat{\tilde{\Theta}}$ und Mittelung über das Grundgebiet liefert wegen der

---

*) In [1] wird gezeigt: Wenn $\overset{\circ}{\sigma}$ = p+iq, p,q reell, $q\neq 0$, so folgt $p<0$. Dieser Beweis ist also überflüssig.

Beziehung (9) notwendig die Gleichung

$$\left(\mathring{\sigma}-\mathring{\sigma}^{*}\right)\left[P\,\mathring{R}\left(\hat{\tilde{u}}_i^{*},\hat{\tilde{u}}_i\right)+\left(\hat{\tilde{\Theta}}^{*},\hat{\tilde{\Theta}}\right)\right]=0$$

Daraus folgt, daß $\mathring{\sigma}$ reell ist.
Führt man die Operation

$$\Delta\,\delta_{ik}-\partial_k\partial_i\,,\qquad \delta_{ik}=\begin{cases}1 & \text{für } i=k\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

an der Vektorgleichung von (12) aus, so ergibt sich unter Beachtung von $\partial_i\hat{\tilde{u}}_i=0$ für die z-Komponente

$$\mathring{\sigma}\,P\,\Delta\,\hat{\tilde{u}}_z=\Delta_2\hat{\tilde{\Theta}}+\Delta^2\hat{\tilde{u}}_z\,,\qquad \Delta_2=\partial_{xx}^2+\partial_{yy}^2\,.$$

Mit dieser Gleichung kann man aus der Skalargleichung von (12) $\hat{\tilde{\Theta}}$ eliminieren und erhält:

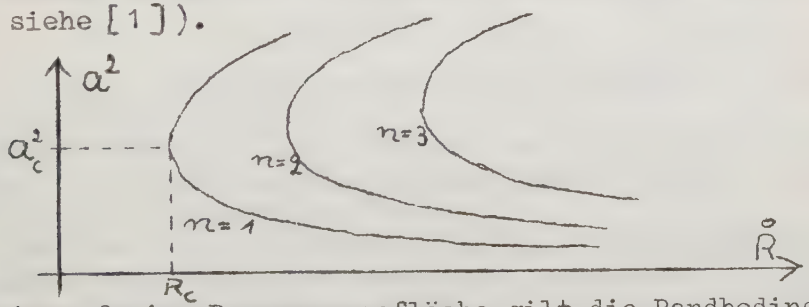
$$(2o)\qquad\left[\mathring{\sigma}^2P\Delta-\mathring{\sigma}\,\Delta^2(1+P)+\Delta^3-\mathring{R}\,\Delta_2\right]\hat{\tilde{u}}_z=0$$

Mit dem Ansatz (21) $\Delta_2\hat{\tilde{u}}_z+a^2\hat{\tilde{u}}_z=0$,
$a^2>0$ Separationsparameter, gelingt Separation der Variablen z von x, y.

$$\hat{\tilde{u}}_z=w(x,y)\cdot f(z)\,,$$

$$(22)\qquad\left[\mathring{\sigma}^2P\left(\partial_{zz}^2-a^2\right)-\mathring{\sigma}\left(\partial_{zz}^2-a^2\right)^2(1+P)+\left(\partial_{zz}^2-a^2\right)^3+\mathring{R}\,a^2\right]\hat{\tilde{u}}_z=0$$

Dies ist eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung 6. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, die geschlossen lösbar ist.
Es besteht qualitativ folgender Zusammenhang zwischen a^2 und $\mathring{R}$ (siehe [1]).



An einer freien Begrenzungsfläche gilt die Randbedingung $\hat{\tilde{u}}_z=\partial_{zz}^2\hat{\tilde{u}}_z=\hat{\tilde{\Theta}}=0$. In diesem Fall ist die Lösung von (22):

$$f(z)=A\cos n\pi z$$

und es besteht die Eigenwertbedingung

$$-\mathring{\sigma}^2P\left(n^2\pi^2+a^2\right)-\mathring{\sigma}\left(n^2\pi^2+a^2\right)^2(1+P)-\left(n^2\pi^2+a^2\right)^3+a^2\mathring{R}=0$$

Die Kurven $\mathring{\sigma}=0$ sind im Diagramm dargestellt.

$$\mathring{R}=\frac{1}{a^2}\left(n^2\pi^2+a^2\right)^3$$

Für Kombinationen $\overset{\circ}{R}$, a^2, für die diese Beziehung gilt, existieren also Lösungen von (11). Die minimale Rayleighzahl $\overset{\circ}{R}_c$, bei der es noch stationäre Lösungen gibt, liegt bei $a^2 = a_c^2 = \frac{\pi^2}{2}$. Dem entspricht

$$\overset{\circ}{R}_c = \frac{27}{4}\pi^4$$

In Fall fester Begrenzungsflächen ergibt die numerische Rechnung [6]:

$$a_c = 3{,}117\,, \quad \overset{\circ}{R}_c = 1707{,}762\,, \quad f(z) = \sum_{\nu=1}^{3} A_\nu \cos q_\nu z$$

$$q_1 = i \cdot 3{,}974\,, \quad q_2 = 5{,}195 + i \cdot 2{,}126\,, \quad q_3 = q_2^*$$

$$A_1 = 1\,, \quad A_2 = -3{,}077 \cdot 10^{-2} + i \cdot 5{,}195 \cdot 10^{-2}\,, \quad A_3 = A_2^*\,.$$

Qualitativ verlaufen auch hier die Eigenwertkurven wie im obigen Diagramm.

Da für geringe Abweichungen der Rayleighzahl von $\overset{\circ}{R}_c$ nur n=1 in Frage kommt, hat man in den separierten Lösungen bereits alle Lösungen von (2o) gefunden.

Für von Null verschiedene Werte $\overset{\circ}{\sigma}$ gilt

$$\overset{\circ}{\sigma}_{1,2} = -(n^2\pi^2 + a^2)\frac{1+P}{2P} \pm \sqrt{(n^2\pi^2+a^2)^2\frac{(1+P)^2}{4P^2} + \frac{a^2\overset{\circ}{R}}{P(n^2\pi^2+a^2)} - (n^2\pi^2+a^2)^3}\,.$$

Betrachtet man den Fall n=1, so sieht man, daß es für die Anwachsraten $\overset{\circ}{\sigma}$ zwei Bereiche gibt:

$$\overset{\circ}{R} > \frac{1}{a^2}(\pi^2 + a^2)^3 \;:\; \overset{\circ}{\sigma}_1 > 0\,, \; \overset{\circ}{\sigma}_2 < 0$$

$$\overset{\circ}{R} < \frac{1}{a^2}(\pi^2 + a^2)^3 \;:\; \overset{\circ}{\sigma}_1 < 0\,, \; \overset{\circ}{\sigma}_2 < 0$$

Das analoge Ergebnis für feste Begrenzungsflächen bei $z = \pm\frac{1}{2}$ ist qualitativ dasselbe.

Für Rayleighzahlen $\overset{\circ}{R} > \overset{\circ}{R}_c$ existieren also Anwachsraten $\overset{\circ}{\sigma} > 0$, für $\overset{\circ}{R} < \overset{\circ}{R}_c$ sind alle Anwachsraten negativ. Für $\overset{\circ}{R} = \overset{\circ}{R}_c$ ist die höchste Anwachsrate $\overset{\circ}{\sigma} = 0$.

In den Stabilitätsgleichungen erster Ordnung wird im folgenden stets der Fall $\overset{\circ}{\sigma} = 0$ betrachtet, so daß mit $\overset{\circ}{R} = \overset{\circ}{R}_c$ die ungestörten Gleichungen (11) und (12) identisch werden. Dann besitzt a den zu $\overset{\circ}{R}_c$ gehörigen festen Wert. Dieser Wert wird eindeutig durch die Art der Begrenzungsebenen bei $z = \pm\frac{1}{2}$ festgelegt. Ebenfalls dadurch festgelegt ist die z-Abhängigkeit f(z). Dagegen gibt es für $\overset{\circ}{R} = \overset{\circ}{R}_c$, d.h. für festes $a = a_c$ unendlich viele Lösungen von

$$(23) \qquad \Delta_2 w + a^2 w = 0 \quad *)$$

---

*) Da in erster Ordnung durch die Stabilitätsgleichungen (12)

Ein partikuläres Integral von (23) ist

$$w_{\varkappa} = e^{i(R_{\varkappa}, \mathfrak{r})}, \quad \mathfrak{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad R_{\varkappa}^2 = a^2 \qquad \varkappa = -\infty, \ldots, -1, +1, \ldots +\infty$$

Aus dem Orthogonalsystem der $w_{\varkappa}$ läßt sich die allgemeine Lösung von (23) durch Superposition gewinnen.

$$w = \sum_{\varkappa=-n}^{+n} C_{\varkappa} w_{\varkappa}, \quad \varkappa \neq 0$$

w ist reell, wenn zu jedem $R_{\varkappa}$ ein $-R_{\varkappa}$ existiert und $C_{-\varkappa} = C_{\varkappa}^*$ ist. Dafür die $w_{\varkappa}$ die Orthogonalitätsrelation

$$\overline{w_{\varkappa}^* w_{\mu}} = \delta_{\varkappa\mu}$$

gilt - der Querstrich deutet die x,y-Mittelung an-, lautet die Normierungsbedingung für w

$$\sum_{\varkappa} C_{\varkappa} C_{\varkappa}^* = 1, \quad \varkappa \neq 0$$

Aus $\hat{u}_z$ lassen sich die anderen gesuchten Funktionen durch Differentiation gewinnen [1]. Für $\overset{\circ}{\vartheta} = 0$ gilt

$$\hat{u}_x = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \hat{u}_z, \quad \hat{u}_y = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \hat{u}_z, \quad \hat{\Theta} = \frac{1}{a^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - a^2 \right] \hat{u}_z$$

Das allgemeine Lösungssystem erster Ordnung schreiben wir in der Form

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{3} A_{\nu} \operatorname{Col} q_{\nu} z, \quad g(z) = \sum_{\nu=1}^{3} B_{\nu} \operatorname{Col} q_{\nu} z$$

$$\hat{u}_i = \sum_{\varkappa=-n}^{+n} C_{\varkappa} \delta_i f(z) w_{\varkappa}, \quad \hat{\Theta} = \sum_{\varkappa=-n}^{+n} g(z) w_{\varkappa}, \quad \varkappa \neq 0$$

mit der Abkürzung

$$\delta_i = \frac{1}{\Delta_2} \begin{pmatrix} -\partial_x \partial_z \\ -\partial_y \partial_z \\ \Delta_2 \end{pmatrix}$$

Unter Δ_2 soll im folgenden immer der Faktor verstanden werden, der sich bei der Differentiation $\partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2$ der trigonometrischen Funktionen ergibt. Die komplexen Zahlen A_{ν}, B_{ν}, q_{ν} haben für freie Begrenzungsebenen die Werte

$$A_1 = 1, \quad B_1 = \frac{9}{2} \pi^2, \quad q_1 = \pi \cdot i, \quad A_2 = A_3 = B_2 = B_3 = 0$$

---

keine der Lösungen von (23) vor einer anderen ausgezeichnet ist, ist es nicht zweckmäßig, in dieser Ordnung eine Stabilitätsunterscheidung zwischen verschiedenen Funktionen w treffen zu wollen. Dies ist geschehen in [2]. Dort wurden verschiedene Funktionen w betrachtet und dann aus (20) Lösungen ausgerechnet, die zu w passende Perioden besaßen. Aus den verschiedenen Zeitabhängigkeiten schloß man dann auf Stabilitätsunterschiede. Dies ist nicht zulässig, denn bei einer Stabilitätsrechnung müssen immer die Störungen mit höchster Anwachsrate untersucht werden. Diese ist in erster Ordnung für alle w gleich Null.

und für feste Begrenzungsebenen die oben angegebenen Werte. Die zweidimensionale Walzenströmung und die dreidimensionale reguläre Secheckströmung interessieren, weil sie experimentell beobachtet werden. Diese Strömungen haben in unserer Form die Darstellung

$$w = \sum_{\alpha=-1}^{+1} C_\alpha w_\alpha \,, \quad C_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{bzw.}$$

$$\alpha \neq 0$$

$$w = \sum_{\alpha=-3}^{+3} C_\alpha w_\alpha \,, \quad C_\alpha = \frac{1}{\sqrt{6}} \,.$$

Berechnung der Eigenwertstörungen $\overset{1}{R}$ und $\overset{1}{\sigma}$ und der Lösungen zweiter Ordnung.

Die inhomogenen Gleichungssysteme (15) und (17) lauten in zweiter Ordnung (m=2)

$$P \hat{u}_j \partial_j \hat{u}_i = D_{1i}(\overset{2}{w}, \overset{2}{\Theta}) \tag{24}$$
$$-\hat{R}\,\hat{u}_j \lambda_j + \hat{u}_j \partial_j \hat{\Theta} = D_2(\overset{2}{w}, \overset{2}{\Theta}) \,,$$

$$P\hat{\sigma}\,\hat{\tilde{u}}_i + P(\hat{u}_j \partial_j \hat{\tilde{u}}_i + \hat{\tilde{u}}_j \partial_j \hat{u}_i) = D_{1i}(\overset{2}{w}, \overset{2}{\tilde{\Theta}}) \tag{25}$$
$$-\hat{R}\,\hat{\tilde{u}}_j \lambda_j + \hat{\sigma}\,\hat{\tilde{\Theta}} + \hat{u}_j \partial_j \hat{\tilde{\Theta}} + \hat{\tilde{u}}_j \partial_j \hat{\Theta} = D_2(\overset{2}{w}, \overset{2}{\tilde{\Theta}}) \,.$$

Dabei ist für $\overset{\circ}{\sigma}$ bereits der höchste Wert $\overset{\circ}{\sigma}=0$ und für $\overset{\circ}{R}$ $\overset{\circ}{R}_c$ gesetzt worden. Es werden also in erster Ordnung Störfunktionen mit höchster Anwachsrate betrachtet.
Die Eigenwertstörungen $\hat{R}, \hat{\sigma}$ werden aus den Lösbarkeitsbedingungen für die Gleichungen (24), (25) bestimmt. Da die Operatoren D selbstadjungiert sind, sind alle Lösungen erster Ordnung orthogonal zu den rechten Seiten von (24), (25), also auch zu den linken Seiten.
Im Anhang wird gezeigt, daß alle Tripelprodukte

$$(\hat{u}_i, \hat{u}_j \partial_j \hat{u}_i'') \,, \quad (\hat{\Theta}, \hat{u}_j \partial_j \hat{\Theta}'')$$

aus drei Lösungen $\hat{u}_i, \hat{\Theta}, \hat{u}_i', \hat{\Theta}', \hat{u}_i'', \hat{\Theta}''$ bei Mittelung über das Grundgebiet verschwinden. Die Striche deuten verschiedene x,y-Abhängigkeit der Funktionen an.
Eine spezielle notwendige Lösbarkeitsbedingung für (24) ist demnach $\hat{R}(\hat{\Theta}, \hat{u}_z) = 0$

Da $(\hat{\Theta}\,\hat{u}_z) = -\frac{1}{R_c}(\hat{\Theta}, \Delta\hat{\Theta}) = \frac{1}{R}(\partial_j\hat{\Theta}, \partial_j\hat{\Theta}) \neq 0$,

folgt $\hat{R} = 0$

Wird zunächst einmal vorausgesetzt, daß $\overset{1}{R}$ nicht verschwin-

det und für genügend kleine ε den Hauptbeitrag zu $R-R_c$ liefert, dann ist der Wärmetransport durch Konvektion proportional zu $R-R_c$. Denn es gilt

$$R - \overset{0}{R}_c = \varepsilon^2 \overset{2}{R}$$

$$\overline{H_z} = \varepsilon^2 \left(\overline{\hat{u}_z \hat{\Theta}} - \partial_z \overset{2}{\Theta} \right) = \left(\overline{\hat{u}_z \hat{\Theta}} - \partial_z \overset{2}{\Theta} \right) \frac{R-R_c}{\overset{2}{R}}$$

bis auf Größen höherer Ordnung in ε. Diese Abhängigkeit wird für geringe $R-R_c$ durch die Experimente bestätigt. Mit $\overset{1}{R}=0$ ist die entsprechende Lösbarkeitsbedingung für (25)

$$\hat{\sigma} \left[P \overset{0}{R} (\hat{u}_i, \hat{u}_i) + (\hat{\Theta}, \hat{\Theta}) \right] = 0$$

Da $P\overset{0}{R}(\hat{u}_i, \hat{u}_i) + (\hat{\Theta}, \hat{\Theta})$ ein positiv definiter Ausdruck ist, muß $\hat{\sigma}=0$ gefordert werden. Man kann demnach auch in dieser Ordnung keine Stabilitätsunterscheidung treffen. Vielmehr ist bei allen Störfunktionen bis zur zweiten Ordnung die höchste Anwachsrate

$$\sigma = \overset{0}{\sigma} + \varepsilon \hat{\sigma} = 0 .$$

Die im Anhang ersichtliche Tatsache, daß die x,y-Mittelung über Tripelprodukte aus Funktionen erster Ordnung nur dann einen Beitrag liefert, wenn die drei Wellenzahlvektoren $\mathcal{R}$ zueinander hexagonal angeordnet sind, deutet formal auf die beim Experiment beobachteten Sechseckströmungen hin. Da aber $\hat{R} = \hat{\sigma} = 0$ ist, können wir nicht schließen, daß die Sechseckströmung irgendwie ausgezeichnet ist. In [4] wird versucht, durch $R \neq 0$ für den unsymmetrischen Fall: feste Begrenzung bei $z = -\frac{1}{2}$, freie Begrenzung bei $z = +\frac{1}{2}$, das beobachtete Sechseckzellmuster zu erklären. Dies ist aber nicht möglich, weil unser Ergebnis $\hat{R}=0$ für die unsymmetrischen Randbedingungen ebenfalls gilt.

Um höhere Näherungen berechnen zu können, müssen wir spezielle Lösungen der inhomogenen Gleichungen (24) und (25) für $\hat{R}=\hat{\sigma}=0$ suchen.

Führt man die Differentiation $\Delta \delta_{ik} - \partial_k \partial_i$ an der Vektorgleichung von (24) aus, so erhält man für die z-Komponente

$$\Delta^2 \overset{2}{u}_z + \Delta_2 \overset{2}{\Theta} = P \Delta_2 \delta_i \hat{u}_j \partial_j \hat{u}_i$$

Zusammen mit der skalaren Gleichung von (24) ergibt sich

$$\begin{aligned} \left(\Delta^3 - \overset{0}{R}_c \Delta_2\right) \overset{2}{u}_z &= P \Delta_2 \Delta \, \delta_i \hat{u}_j \partial_j \hat{u}_i - \Delta_2 \hat{u}_j \partial_j \overset{1}{\Theta} \\ \left(\Delta^3 - \overset{0}{R}_c \Delta_2\right) \overset{2}{\Theta} &= -P \overset{0}{R}_c \Delta_2 \delta_i \hat{u}_j \partial_j \hat{u}_i + \Delta^2 \hat{u}_j \partial_j \hat{\Theta} . \end{aligned} \qquad (26)$$

Teilen wir die Inhomogenitäten in einen zu P proportionalen und einen von P unabhängigen Teil auf und entsprechend

$$(27)\qquad \overset{2}{u}_z = \overset{2}{u}_{z0} + P\,\overset{2}{u}_{zP}\,, \qquad \overset{2}{\Theta} = \overset{2}{\Theta}_0 + P\,\overset{2}{\Theta}_P\,,$$

so können wir aus $\overset{2}{u}_{z0}$ und $\overset{2}{\Theta}_p$ durch

$$(28)\qquad \Delta_2\,\overset{2}{\Theta}_0 = -\Delta^2\,\overset{2}{u}_{z0}\,, \qquad \overset{2}{u}_{zP} = -\frac{1}{R}\,\Delta\,\overset{2}{\Theta}_P$$

$\overset{2}{u}_{zp}$ und $\overset{2}{\Theta}_0$ bestimmen. Der Teil von $\overset{2}{\Theta}_0$, der nur von z abhängt, muß gesondert betrachtet werden.

Durch Einsetzen verifiziert man ferner die Beziehungen

$$\Delta_2\,\overset{2}{u}_x = -\partial_x\,\partial_z\,\overset{2}{u}_z\,, \qquad \Delta_2\,\overset{2}{u}_y = -\partial_y\,\partial_z\,\overset{2}{u}_z$$

Analog zu den Lösungen erster Ordnung schreiben wir für die spezielle Lösung des inhomogenen Systems (24) den Ansatz

$$(29)\qquad \overset{2}{u}_i = \sum_{\varkappa\lambda} \delta_i\, F(\varrho_{\lambda\varkappa}, z)\, C'_{\varkappa} C_\lambda\, w_\varkappa w_\lambda\,, \qquad F = F_0 + P\,F_P$$

$$\overset{2}{\Theta} = \sum_{\varkappa\lambda} G(\varrho_{\varkappa\lambda}, z)\, C_\varkappa C_\lambda\, w_\varkappa w_\lambda\,, \qquad G = G_0 + P\,G_P$$

und berücksichtigen damit die quadratische Abhängigkeit der Inhomogenitäten von den Entwicklungsfunktionem w_λ Die Größe

$$\varrho_{\varkappa\lambda} = \frac{1}{a^2}\,(R_\varkappa, R_\lambda)$$

kommt durch die Differentiationen nach x und y herein. Sie kann die Werte

$$-1 \le \varrho_{\varkappa\lambda} \le +1$$

annehmen. Es gilt $\Delta_2 = -(R_\varkappa + R_\lambda)^2 = -2a^2(1+\varrho_{\varkappa\lambda})$.

Da die z-Abhängigkeit der Inhomogenitäten von (26) eine Summe von Hyperbelfunktionen ist, lassen sich schließlich die Formeln

$$(30)\qquad F_0(\varrho_{\varkappa\lambda}, z) = \sum_{\nu\mu=1}^{3} a^2(1+\varrho_{\varkappa\lambda})(A_\nu B_\mu - \varrho_{\varkappa\lambda} A_\mu B_\nu)\left[\frac{\sin(q_\nu+q_\mu)z}{D_+} - \frac{\sin(q_\nu-q_\mu)z}{D_-}\right]$$
$$-\sum_\nu b_\nu(\varrho_{\varkappa\lambda})\sin q'_\nu z\,, \qquad D_\pm = [(q_\nu \pm q_\mu)^2 - 2a^2(1+\varrho)]^2 + 2q^2(1+\varrho)$$

$$G_P(\varrho_{\varkappa\lambda}, z) = \sum_{\nu\mu=1}^{3} -\frac{R_c}{2}(1+\varrho_{\varkappa\lambda})\,A_\nu A_\mu\, q_\nu\left[E_+ \sin(q_\nu+q_\mu)z + E_- \sin(q_\nu-q_\mu)z\right] -$$
$$-\sum d_\nu(\varrho_{\varkappa\lambda})\sin q'_\nu z\,, \qquad E_\pm = \frac{1}{D_\pm}\left[(q_\nu \mp \varrho_{\varkappa\lambda} q_\mu)(q_\nu \pm q_\mu) - 2a^2(1-\varrho_{\varkappa\lambda})\right]$$

gewinnen. Die zweiten Terme, die dem homogenen Anteil der Gleichung (26) genügen, müssen in (30) hinzugefügt werden, damit die Randbedingungen

$$F = G = \frac{\partial^2}{\partial z^2} F = 0 \qquad \text{für } z = \pm\frac{1}{2}\ (\text{Fall "frei"})$$

bzw. $F = G = \partial_z F = 0$ für $z = \pm\frac{1}{2}$ (Fall "fest")

befriedigt werden können. Die komplexen Koeffizienten b_ν

und d_ν lassen sich eindeutig bestimmen, weil das homogene Randwertproblem 1. Ordnung für den Parameterwert $\overset{0}{R}=R_c$ keine antimetrische Lösung besitzt.
Ein Teil, der nur von z abhängt, kommt lediglich in der G_0 bestimmenden Inhomogenität vor. Für den zugehörigen Teil von G_0 gilt wegen $G_0(-1,z)=0$ für $z=\pm\frac{1}{2}$:

$$\frac{d}{dz}\,G_0(-1,z) = f\cdot g = \sum_{\nu,\mu=1}^{3} A_\nu B_\mu \cos q_\nu z \cos q_\mu z$$

$$G_0(-1,z) = \int_0^z f\cdot g\,dz - \Big[\int_0^{\frac{1}{2}} f\cdot g\,dz\Big]\cdot 2z \qquad (31)$$

Die spezielle Lösung (29) ist in z antimetrisch und die allgemeine Lösung 1. Ordnung in z symmetrisch. Daher ist nun die oben erwähnte Bedingung

$$(\hat{\mu}_z, \hat{\Theta}) = 0$$

für n=2 erfüllt.
Die analoge Lösung von (25) mit $\hat{\sigma} = \hat{R} = 0$ ist

$$\overset{2}{\mu}_i = \sum_{\varkappa\lambda} \delta_i F(\varrho_{\varkappa\lambda},z)\,[C_{\varkappa\varepsilon}\tilde{C}_\lambda + \tilde{C}_{\varkappa\varepsilon}C_\lambda]\,w_{\varkappa\varepsilon}w_\lambda =$$

$$= 2\sum_{\varkappa\lambda} \delta_i F(\varrho_{\varkappa\lambda},z)\,C_{\varkappa\varepsilon}\tilde{C}_\lambda\,w_{\varkappa\varepsilon}w_\lambda\,, \qquad (32)$$

$$\overset{2}{\tilde{\Theta}} = 2\sum_{\varkappa\lambda} G(\varrho_{\varkappa\lambda},z)\,C_{\varkappa\varepsilon}\tilde{C}_\lambda\,w_{\varkappa\varepsilon}w_\lambda\,.$$

Eigenwertstörungen 2. Ordnung.

Um eine Aufspaltung der Eigenwerte σ zu erhalten, gehen wir zur nächsthöheren Ordnung (m=3) der Gleichungssysteme (15) und (17) über.

$$P\,\overset{2}{\mu}_j\,\partial_j\,\hat{\mu}_i + P\,\hat{\mu}_j\,\partial_j\,\overset{2}{\mu}_i = D_{1i}(\overset{3}{\mathfrak{N}},\overset{3}{\Theta})$$

$$-\overset{2}{R}\,\hat{\mu}_j\lambda_j + \overset{2}{\mu}_j\,\partial_j\,\hat{\Theta} + \hat{\mu}_j\,\partial_j\,\overset{2}{\Theta} = D_2(\overset{3}{\mathfrak{N}},\overset{3}{\Theta})\,, \qquad (33)$$

$$P(\overset{2}{\sigma}\hat{\tilde{\mu}}_i + \overset{1}{\tilde{\mu}}_j\partial_j\,\hat{\mu}_i + \hat{\tilde{\mu}}_j\partial_j\,\overset{1}{\mu}_i + \overset{1}{\mu}_j\partial_j\,\hat{\tilde{\mu}}_i + \hat{\mu}_j\partial_j\,\overset{2}{\tilde{\mu}}_i) = D_{1i}(\overset{3}{\mathfrak{N}},\overset{3}{\tilde{\Theta}})$$

$$-\overset{2}{R}\,\hat{\tilde{\mu}}_j\lambda_j + \overset{1}{\sigma}\hat{\tilde{\Theta}} + \overset{1}{\tilde{\mu}}_j\partial_j\,\hat{\Theta} + \hat{\tilde{\mu}}_j\partial_j\,\overset{1}{\Theta} + \overset{1}{\mu}_j\partial_j\,\hat{\tilde{\Theta}} + \hat{\mu}_j\partial_j\,\overset{2}{\tilde{\Theta}} = D_2(\overset{3}{\mathfrak{N}},\overset{3}{\tilde{\Theta}}) \qquad (34)$$

In [5] wird durch indirekten Beweis gezeigt, daß die Beziehungen

$$(\hat{\mu}_i, \overset{2}{\mu}_j'\,\partial_j\,\hat{\mu}_i'') = 0\,,\quad (\hat{\Theta}\,\overset{1}{\mu}_j'\,\partial_j\,\hat{\Theta}'') = 0 \qquad (35)$$

gelten. Die Striche deuten verschiedene x,y-Abhängigkeiten an.

Beachtet man die in (9) angegebene Form der Selbstadjungiertheit des zu (33) gehörigen homogenen Gleichungssystems, dann müssen die linken Seiten von (33) zu dem Lösungssystem 1. Ordnung

$$\hat{u}_{i\lambda} = \delta_i \hat{u}_{z\lambda} = \delta_i f w_\lambda \,, \quad \hat{\Theta}_\lambda = g w_\lambda$$

für alle λ orthogonal sein. Also muß mit (35) gelten

$$(36) \quad 0 = -\overset{1}{R}\left(\hat{\Theta}^*_\lambda, \hat{u}_z\right) + P\mathring{R}_c\left(\hat{u}^*_{i\lambda}, \hat{u}_j \partial_j \overset{1}{u}_i\right) + \left(\hat{\Theta}^*_\lambda, \hat{u}_j \partial_j \overset{1}{\Theta}\right).$$

Für das entsprechende Stabilitätsgleichungssystem ist die analoge Bedingung

$$(37) \quad \begin{aligned} 0 = \overset{1}{\sigma}\ & \left[P\mathring{R}_c\left(\hat{\tilde{u}}^*_{i\lambda}, \hat{\tilde{u}}_i\right) + \left(\hat{\tilde{\Theta}}^*_\lambda, \hat{\tilde{\Theta}}\right)\right] - \overset{2}{R}\left(\hat{\tilde{\Theta}}^*_\lambda, \hat{\tilde{u}}_z\right) + \\ & + P\mathring{R}_c\left(\hat{u}^*_{i\lambda}, \hat{u}_j \partial_j \overset{2}{\tilde{u}}_i + \hat{\tilde{u}}_j \partial_j \overset{1}{u}_i\right) + \left(\hat{\Theta}^*_\lambda, \hat{u}_j \partial_j \overset{2}{\tilde{\Theta}} + \hat{\tilde{u}}_j \partial_j \overset{1}{\Theta}\right) \end{aligned}$$

für alle λ.

Die in (36) auftretenden Integrale formen wir zum Teil um.

$$\begin{aligned} \left(\hat{\Theta}^*_\lambda, \hat{u}_j \partial_j \overset{2}{\Theta}\right) &= \left(\hat{\Theta}^*_\lambda, \partial_j \hat{u}_j \overset{1}{\Theta}\right) = \\ &= \left(\partial_j \hat{\Theta}^* \hat{u}_j \overset{2}{\Theta}\right) - \left(\overset{1}{\Theta}, \hat{u}_j \partial_j (\hat{\Theta}^*_\lambda)\right). \end{aligned}$$

Das Integral über die Divergenz läßt sich in ein Oberflächenintegral umwandeln, welches in derselben Weise verschwindet, wie bei der Selbstadjungiertheit der Operatoren D gezeigt wurde.

Ebenso gilt

$$\left(\hat{u}^*_{i\lambda}, \hat{u}_j \partial_j \overset{2}{u}_i\right) = -\left(\overset{2}{u}_i, \hat{u}_j \partial_j (\hat{u}^*_{i\lambda})\right) = -\left(\delta_i \overset{2}{u}_z, \hat{u}_j \partial_j (\hat{u}^*_{i\lambda})\right).$$

Führen wir vorübergehend durch

$$\Delta_2 U_i = \hat{u}_j \partial_j (\hat{u}^*_{i\lambda})$$

neue Funktionen U_i ein, so sehen wir, daß auch der Operator δ_i sich überwälzen läßt. Wir zeigen dies an der x-Komponente

$$\begin{aligned} \left(\delta_x \overset{2}{u}_z, \Delta_2 U_x\right) &= \left(\Delta_2 \delta_x \overset{2}{u}_z, U_x\right) = -\left(\partial_x \partial_z \overset{2}{u}_z, U_x\right) = \\ &= -\left(\overset{2}{u}_z, \partial_x \partial_z U_x\right) = \left(\overset{2}{u}_z, \delta_x \hat{u}_j \partial_j (\hat{u}^*_{x\lambda})\right) \end{aligned}$$

Die bei der partiellen Integration auftretenden Beiträge vom Rand verschwinden wegen der Randbedingungen.

Setzen wir nun unsere Darstellungen für die Lösungen 1. und 2. Ordnung ein, so finden wir schließlich die Beziehungen

$$P\mathring{R}_c \overset{2}{u}_z \delta_i \hat{u}_j \partial_j (\hat{u}^*_{i\lambda}) + \overset{2}{\Theta} \hat{u}_j \partial_j (\hat{\Theta}^*_\lambda) =$$

$$= \sum_{\nu,\varkappa,\mu=-n}^{+n} C_\nu C_\mu C_\varkappa L(\delta_{\nu\varkappa}, \delta_{\lambda\mu}) w_\lambda^* w_\nu w_\varkappa w_\mu$$

$$L(\delta_{\nu\varkappa}, \delta_{\lambda\mu}) = G(\delta_{\nu\varkappa})(fg' + \delta_{\lambda\mu} f'g) +$$

$$+ P \mathring{R}_c F(\delta_{\nu\varkappa}) \left\{ -\frac{1}{2a^2} [f''' f + (1+2\delta_{\lambda\mu}) f'' f'] + (1+\delta_{\lambda\mu}) f' f \right\}$$

Die Lösbarkeitsbedingung (36) erhält damit die Form

$$(38)\quad 0 = N_1 \mathring{R} C_\lambda + \sum_{\nu,\mu,\varkappa=-n}^{+n} \left(L(\delta_{\nu\varkappa}, \delta_{\lambda\mu}) C_\nu C_\mu C_\varkappa (w_\lambda^*) w_\nu w_\mu w_\varkappa \right)$$

Durch Indizesvertauschung läßt (37) sich analog schreiben.

$$(39)\quad 0 = -N_1 \mathring{R} \tilde{C}_\lambda + N_2 \sigma^2 \tilde{C}_\lambda - \sum_{\nu,\mu,\varkappa=-n}^{+n} \left[L(\delta_{\nu\varkappa}, \delta_{\lambda\mu}) + 2L(\delta_{\nu\mu}, \delta_{\lambda\varkappa}) \right] C_\nu C_\mu \tilde{C}_\varkappa w_\lambda^* w_\nu w_\mu w_\varkappa$$

Darin haben wir die positiv definiten Größen

$$N_1 = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f g \, dz$$

$$N_2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} [(\frac{f'^2}{a^2} + f^2) \rho \mathring{R}_c + g^2] \, dz$$

eingeführt.

Die x,y-Mittelung

$$\overline{w_\lambda^* w_\nu w_\mu w_\varkappa} = \overline{e^{i(R_\nu + R_\mu + R_\varkappa - R_\lambda, r)}}$$

liefert nur einen Beitrag, wenn $R_\nu + R_\mu + R_\varkappa = R_\lambda$ ist, also genau dann, wenn

1)	2)	3)
$\mu = \lambda$	$\nu = \lambda$	$\varkappa = \lambda$
$\nu = -\varkappa$	$\varkappa = -\mu$	$\nu = -\mu$
	$\mu \neq \lambda$	$\mu \neq \lambda$
		$\neq -\lambda$

1) führt zu einem Diagonalglied von (39), 2), 3) zu Nichtdiagonalgliedern. In diesen drei Fällen ist die z-Integration noch über

$$1)\ L(-1,+1),\ 2)\ L(-\delta_{\lambda\mu}, +\delta_{\lambda\mu}),\ 3)\ L(-\delta_{\lambda\nu}, +\delta_{\lambda\mu})$$

und $1)\ 2L(-\delta_{\lambda\varkappa}, +\delta_{\lambda\varkappa}),\ 2)\ 2L(+\delta_{\lambda\mu}, -\delta_{\lambda\mu}),\ 3)\ 2L(-1,+1)$

auszuführen.

Machen wir die Annahme, daß die $\tilde{C}_\lambda$ für alle R_λ verschwinden, für die auch die C_λ Null sind, dann hebt sich das Glied $-N_1 R C_\lambda$ bis auf $-2L(-1,+1) - L(+1,-1)$ mit dem Diagonalglied von (39) heraus. Wir werden mit dieser Annahme auf gewisse Instabilitäten schließen, so daß sie gerechtfertigt ist. Das Gleichungssystem (39) erhalten wir dann in der Form

$$(40)\qquad N_2 \sigma^2 \tilde{C}_\lambda + \sum_{\nu=-n}^{+n} T_{\lambda\nu} C_\nu^* C_\lambda \tilde{C}_\nu = 0\ ,\quad \lambda = -n, \ldots, -1, +1, \ldots +n$$

$$T_{\lambda\nu} = \begin{cases} -\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} [2L(-1,+1) + L(+1,-1)]\, d\zeta & \text{für } \nu = \lambda \\ \nu = -\lambda \\ -2\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} [L(\vartheta_{\lambda\nu_1} - \vartheta_{\lambda\nu}) + L(-\vartheta_{\lambda\nu_1} + \vartheta_{\lambda\nu}) + L(+1,+1)]\, d\zeta & \text{sonst} \end{cases}$$

und die Lösbarkeitsbedingung (38) als

$$0 = N_1 \overset{2}{R} + \sum_{\nu=-n}^{+n} [L(-1,+1) + 2L(-\vartheta_{\lambda\nu_1} + \vartheta_{\lambda\nu})] C_\nu^* C_\nu - [2L(-1,+1) + L(+1,-1)] C_\lambda^* C_\lambda$$

Mit der Aufteilung $-C_\lambda^* C_\lambda = \frac{1}{2} C_\lambda^* C_\lambda - \frac{3}{2} C_{-\lambda}^* C_{-\lambda}$ des letzten Gliedes gelangen wir zu

$$(41) \qquad 0 = N_1 \overset{2}{R} + \sum_{\nu=-n}^{+n} \overset{1}{T}_{\lambda\nu} C_\nu^* C_\nu$$

$$\overset{1}{T}_{\lambda\nu} = \begin{cases} -\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} L(-1,+1) + \frac{1}{2} L(+1,-1) & \text{für } \nu=\lambda, \nu=-\lambda \\ -\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} L(-1,+1) + 2L(-\vartheta_{\lambda\nu_1} + \vartheta_{\lambda\nu}) & \text{sonst} \end{cases}$$

Addieren wir in (41) die (-ν)-te Spalte zur ν-ten, so stellen wir fest, daß (41) gerade n unabhängige Gleichungen enthält. Zusammen mit der Normierungsbedingung

$$\sum_{\nu=1}^{n} C_\nu^* C_\nu = \frac{1}{2}$$

haben wir ein inhomogenes Gleichungssystem zur Bestimmung der (n+1) Größen $\overset{2}{R}$, $C_1^* C_1, \ldots C_n^* C_n$.

Wir haben also gefunden, daß schon die Lösung des stationären Problems die Lösungsmannigfaltigkeit 1. Ordnung einschränkt. Gibt man in

$$w = \sum_{\nu=-n}^{+n} C_\nu\, e^{i(\mathcal{R}_\nu, \mathcal{H})}$$

die Stellen $\mathcal{R}_\nu$ vor, für die die C_ν nicht Null sind, dann ist die Matrix $T_{\lambda\nu}$ bestimmt, und man hat die C_ν nach (41) zu berechnen. Aber in der Wahl der $\mathcal{R}_\nu$ und von n ist man frei. Wir fragen deshalb nach Stabilitätsunterschieden zwischen den möglichen w und untersuchen zu diesem Zweck das homogene lineare Gleichunssystem (4o).

Da $T_{\lambda\nu}$ symmetrisch ist, ist $T_{\lambda\nu} C_\nu^* C_\lambda$ hermitisch, und wir müssen folgern, daß alle Eigenwerte $\overset{2}{\sigma}$ reell sind. Da wir bewiesen haben, daß $\overset{0}{\sigma}$ und $\overset{1}{\sigma}$ ebenfalls reell sind, kommen also keine zeitlich periodischen Strömungen als Störungen in Frage.

Das Gleichungssystem (4o) hat nur nichttriviale Lösungen $\tilde{C}_\nu$, wenn die charakteristische Gleichung

$$(42) \qquad \det \left| N_1 \overset{2}{\sigma} \delta_{\lambda\nu} + T_{\lambda\nu} C_\nu^* C_\lambda \right| = 0 \quad \text{oder}$$

$$\det \left| \frac{N_1}{C_\mu^* C_\mu} \overset{2}{\sigma} \delta_{\lambda\nu} + T_{\lambda\nu} \right| = 0$$

erfüllt ist.
Dies ist ein reelles Polynom mit n reellen Nullstellen , dessen höchster Koeffizient positiv ist. Besitzt ein solches Polynom negative Koeffizienten, so existieren sicher positive Nullstellen. Es genügt also, statt (42) die Gleichung

(43) $$\det \left| q \overset{2}{\sigma} \delta_{\lambda\nu} + T_{\lambda\nu} \right| = 0$$

auf das Vorzeichen ihrer Wurzeln zu untersuchen.
Indem man die (-ν)-te Spalte von (43) von der ν-ten subtrahiert und die (-λ)-te Zeile zur λ-ten addiert, sieht man, daß wegen

$$T_{\lambda\nu} = T_{-\lambda\nu} = T_{\lambda-\nu}$$

die Hälfte aller $\overset{2}{\sigma}$ gleich Null ist. Für die übrigen gilt die Gleichung

(44) $$\det \left| \overset{2}{\sigma} \delta_{\lambda\nu} + T_{\lambda\nu} \right| = 0, \quad \lambda,\nu = 1,\dots,n \qquad n = 1,2,3,\dots$$

Im Fall "frei" läßt sich Gleichung (44) leicht diskutieren, weil die z-Abhängigkeit der Lösungen 1. Ordnung rein trigonometrisch ist. Dann haben die Lösungen 2.Ordnung nach (28), (3o), (31) die Form

$$F(\rho_{\varkappa\lambda}, z) = \frac{6}{\pi} \frac{(1-\rho_{\varkappa\lambda}^2)\left[\frac{3}{2} + P(5+\rho_{\varkappa\lambda})\right]}{4(5+\rho_{\varkappa\lambda})^3 - 27(1+\rho_{\varkappa\lambda})} \sin 2\pi z$$

$$G(\rho_{\varkappa\lambda}, z) = 9\pi \frac{(1-\rho_{\varkappa\lambda})\left[(5+\rho_{\varkappa\lambda})^2 + \frac{9}{2}(1+\rho_{\varkappa\lambda})\right]}{4(5+\rho_{\varkappa\lambda})^3 - 27(1+\rho_{\varkappa\lambda})} \sin 2\pi z$$

Wegen $-1 \leq \rho_{\varkappa\lambda} \leq +1$ können hier die Koeffizienten vor sin2πz niemals negativ werden. Dann kann man aus dem Ausdruck für $L(\rho_{\nu\varkappa}, \rho_{\lambda\mu})$ ablesen, daß die Nichtdiagonalelemente von $T_{\lambda\nu}$ stets größer sind als die Diagonalelemente und daß die Diagonalelemente positiv sind. Dann ist außer dem höchsten auch der zweithöchste Koeffizient von (44), die Spur der Matrix $T_{\lambda\nu}$ positiv. Der dritthöchste Koeffizient ist jedoch negativ, weil alle aus $T_{\lambda\nu}$ gebildeten zweireihigen Hauptminoren negativ sind. Damit ist ganz allgemein gezeigt, daß im Fall "frei" alle stationären Lösungen instabil sind, weil positive $\overset{2}{\sigma}$ -Werte existieren.

Eine Ausnahme bildet n=1, die zweidimensionale Strömungsform der Walzen, weil dann das Polynom (43) nur vom 2. Grade ist und nur eine negative und eine verschwindende Wurzel vorhanden sind.
Um zu zeigen, daß es bei den Walzen keine höheren $\overset{2}{\sigma}$ -Werte gibt, müssen wir auf die Gleichung (39) zurückgehen

und dort den Fall ins Auge fassen, daß die $\tilde{C}_\lambda$ an anderen Stellen als die C_λ nicht verschwinden. Dann führt die x,y-Mittelung nur zu Diagonalelementen von (39). Zusammen mit $-N_1\overset{\circ}{R}$ ergeben diese

$$(45)\quad \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \left[-2L(-\varrho_{\lambda\nu},+\varrho_{\lambda\nu}) + L(+1,-1)\right] dz$$

Da $L(+1,-1)$ gleich Null und $-L(-\varrho_{\lambda\nu},+\varrho_{\lambda\nu})$ positiv definit ist, sind in diesem Fall nach (39) alle Werte $\overset{2}{\sigma}$ negativ. Für Walzen ist also der höchste Eigenwert $\overset{2}{\sigma}=0$.
In [7] haben wir die Eigenwertstörungen $\overset{n}{R}, \overset{n}{\sigma}$ für Walzen bei freier Schichtbegrenzung bis zur fünften Ordnung berechnet und stellten fest, daß bis zu dieser Ordnung keine positiven σ -Werte auftreten.
Für feste Schichtbegrenzungen ist die Auswertung der Gleichung (44) erheblich komplizierter. Einen Überblick über die in (3o) komplex dargestellten Lösungen 2. Ordnung kann man nur auf numerischem Wege gewinnen. Die erforderlichen Rechnungen wurden für die elektronische Rechenmaschine G3 des Max-Planck-Instituts für Physik, München, programmiert.
Um zu erreichen, daß $q_\nu z$, $q'_\nu = q'_\nu(\varrho_{\varkappa\lambda})$, eine Lösung des homogenen Teils der Gleichungen (26) ist, sucht man die drei komplexen Wurzeln der Gleichung

$$\left[q'^2_\nu - 2a_c^2(1+\varrho_{\varkappa\lambda})\right]^3 + 2a_c^2 \overset{o}{R}_c(1+\varrho_{\varkappa\lambda}) = 0$$

auf.
$$q'^2_\nu = 2a^2(1+\varrho_{\varkappa\lambda}) - \omega_\nu \sqrt[3]{2a^2 R_c(1+\varrho_{\varkappa\lambda})}$$

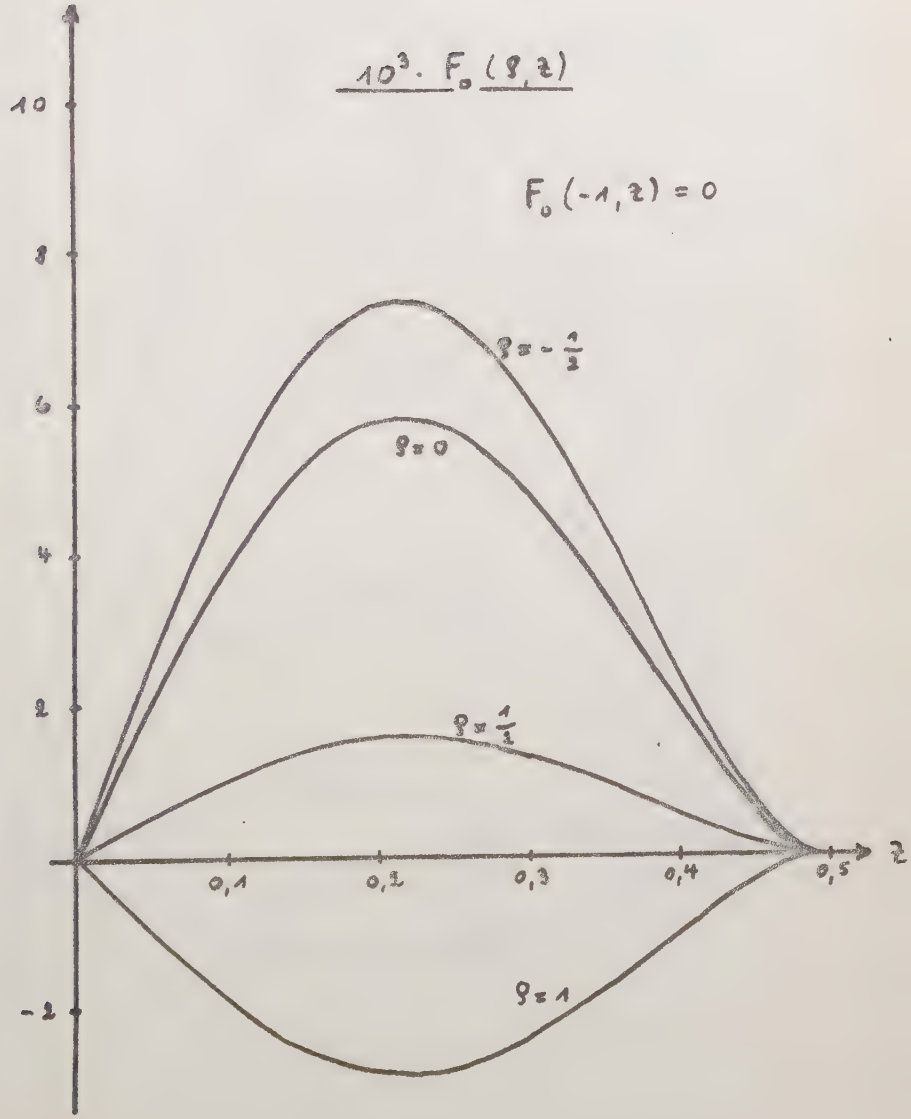
Die ω_ν sind dabei die drei Werte für $\sqrt[3]{1}$:

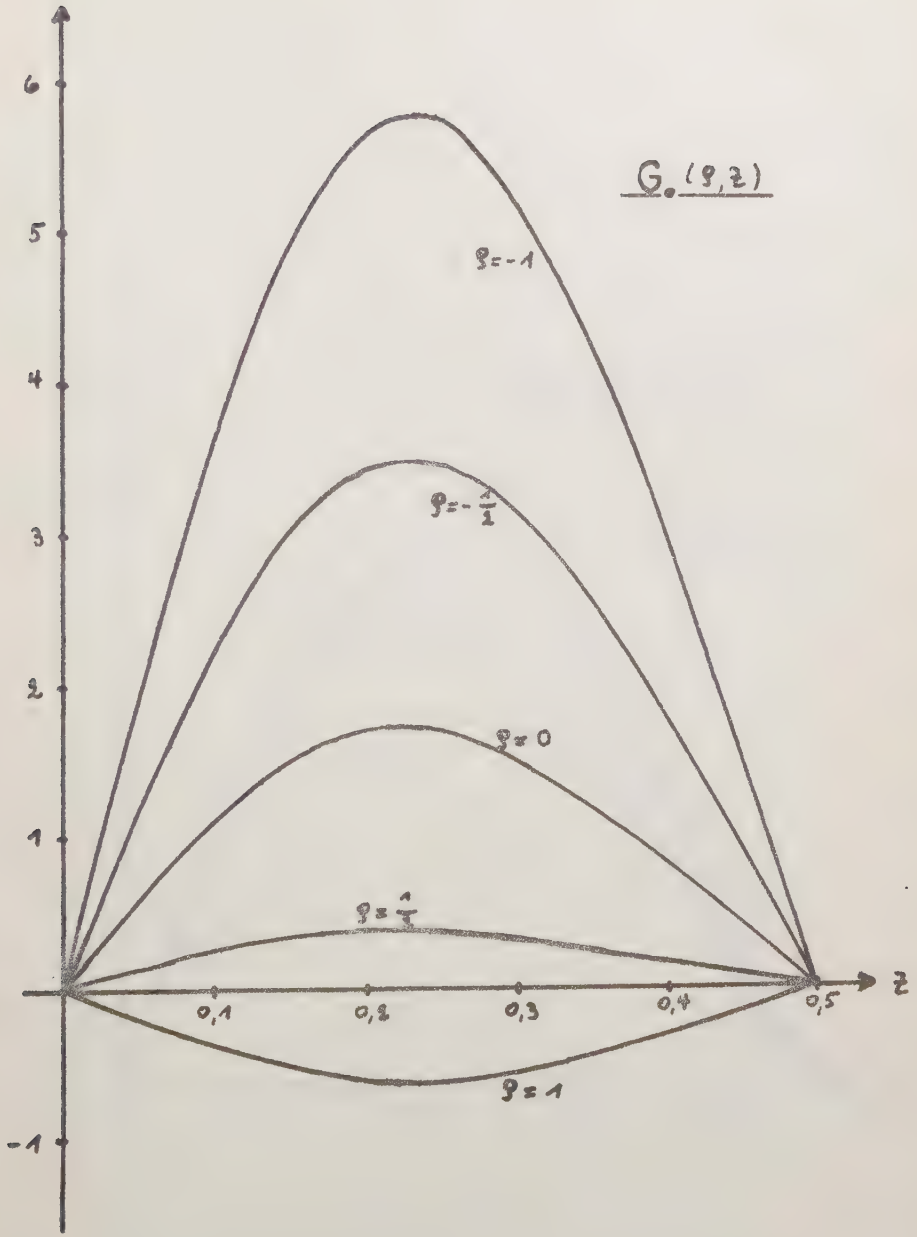
$$\omega_1 = 1,\quad \omega_2 = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\quad \omega_3 = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\ .$$

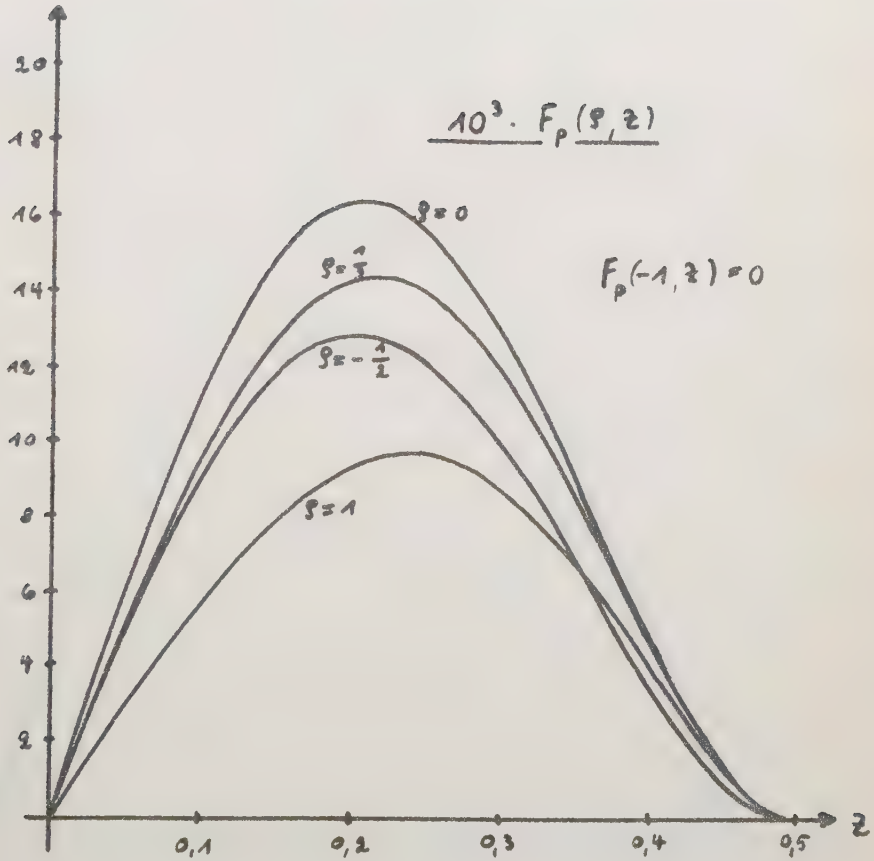
Die KOeffizienten b_ν bzw. d_ν werden aus den komplexen Gleichungen

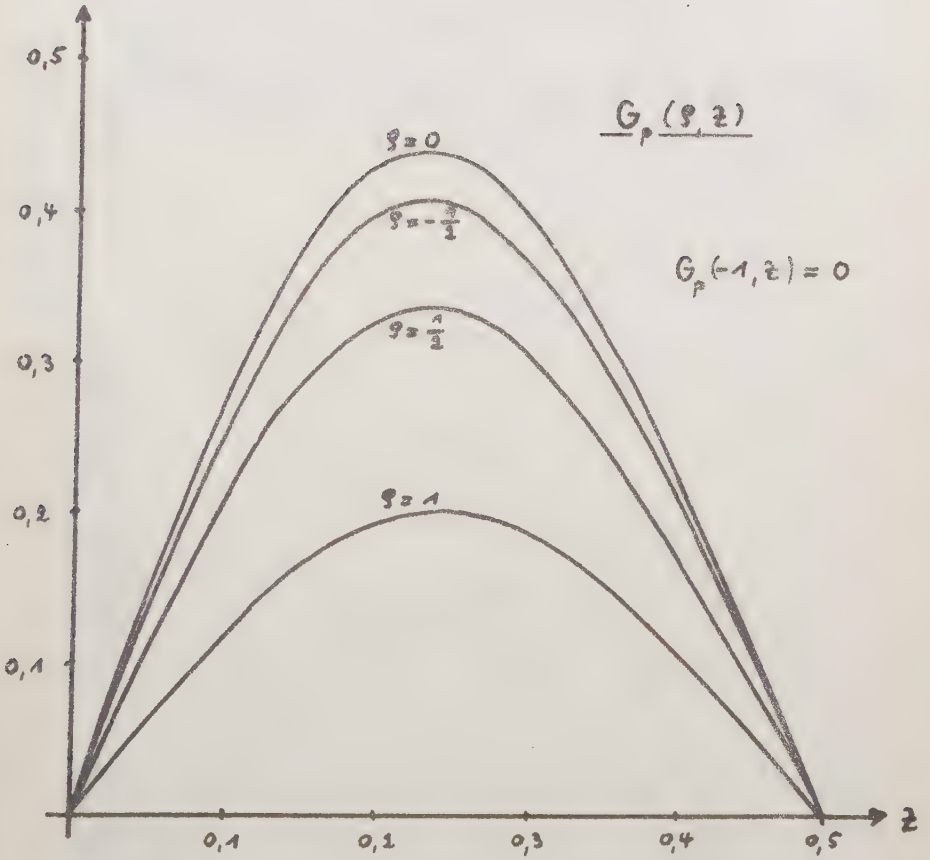
$$F_o(\varrho_{\varkappa\lambda},\tfrac{1}{2}) = \frac{d}{dz}F_o(\varrho_{\varkappa\lambda},\tfrac{1}{2}) = G_o(\varrho_{\varkappa\lambda},\tfrac{1}{2}) = 0 \quad \text{bzw.}$$
$$F_p(\varrho_{\varkappa\lambda},\tfrac{1}{2}) = \frac{d}{dz}F_p(\varrho_{\varkappa\lambda},\tfrac{1}{2}) = G_p(\varrho_{\varkappa\lambda},\tfrac{1}{2}) = 0$$

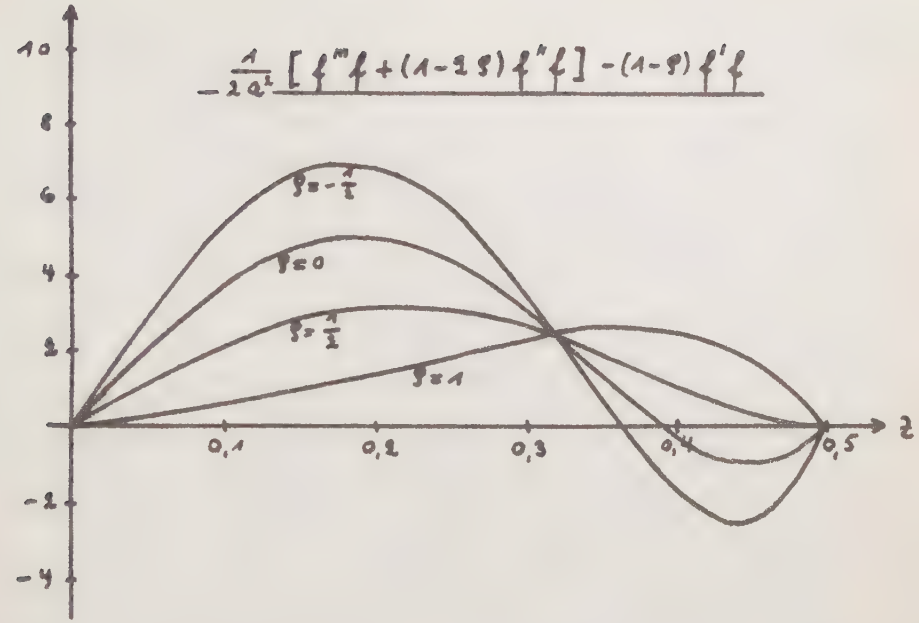
berechnet.
Für einige Werte des Parameters ϱ sind die in den Ausdrücken L vorkommenden Funktionen in den Diagrammen gezeichnet. Es ist bemerkenswert, daß für manche Werte ϱ die Funktionen F_o und G_o zwischen z=0 und z= $\frac{1}{2}$ negativ sind.

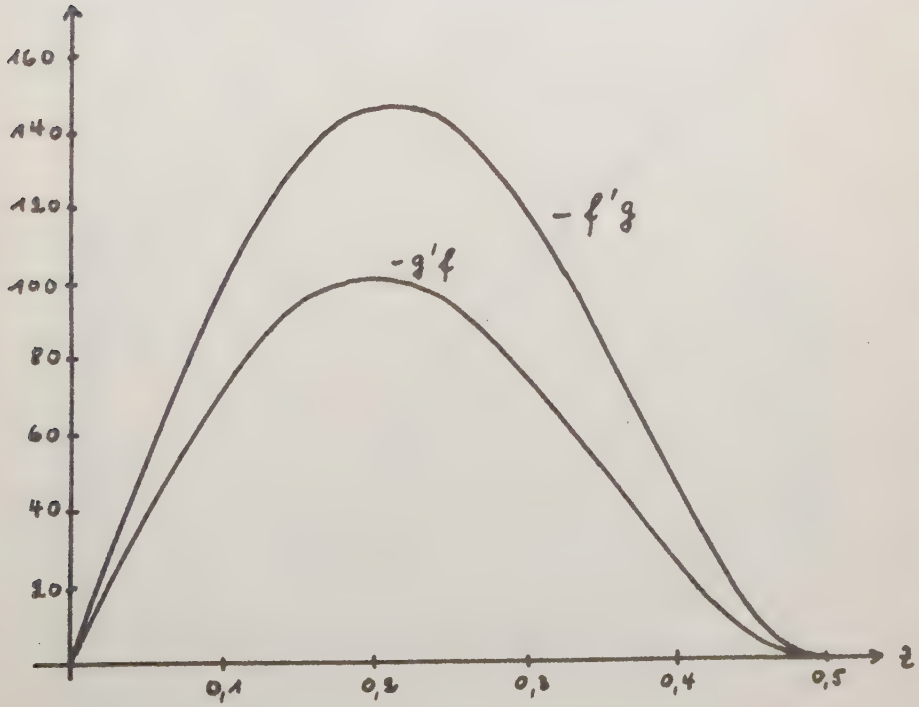

$10^3 \cdot F_0(\beta, z)$
$F_0(-1, z) = 0$
10
8
6
4
2
-2
$\beta = -\frac{1}{2}$
$\beta = 0$
$\beta = \frac{1}{2}$
$\beta = 1$
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
z


G.(g,z)
6
5
4
3
2
1
-1
g=-1
g=-1/2
g=0
g=1/2
g=1
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
z


$10^3 \cdot F_p(\rho, z)$
$F_p(-1, z) = 0$
$\rho = 0$
$\rho = \frac{1}{3}$
$\rho = -\frac{1}{3}$
$\rho = 1$
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
z


$G_p(\rho, z)$
$G_p(-1, z) = 0$
$\rho = 0$
$\rho = -\frac{3}{4}$
$\rho = \frac{1}{2}$
$\rho = 1$
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
z


$-\frac{1}{2a^2}[f'''f+(1-2\beta)f''f]-(1-\beta)f'f$
10
8
6
4
2
-2
-4
$\beta=-\frac{1}{2}$
$\beta=0$
$\beta=\frac{1}{2}$
$\beta=1$
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
z


160
140
120
100
80
60
40
20
$-f'g$
$-g'f$
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
z

$\frac{\delta}{R}$
0
2
4
6
8
50
100
150
200
250
300
P^0
P^1
P^2
$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} L(\gamma,\gamma-\delta,\gamma)\,d\gamma$

Das in $T_{\lambda\nu}$ vorkommende Integral

$$2I = -\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} L(\varphi_{\lambda\nu}, -\varphi_{\lambda\nu}, z)dz = -2\int_{0}^{\frac{1}{2}} L(\varphi_{\lambda\nu}, -\varphi_{\lambda\nu}, z)dz$$

ist quadratisch in P.

$$I = a_0(\varphi) + a_1(\varphi)P + a_2(\varphi)P^2$$

Die drei Funktionen $a_0, 10a_1, 10a_2$ sind numerisch berechnet worden und im letzten Diagramm dargestellt.

8φ	a_0	a_1	a_2
-8	+327,58	0,00	0,00
-7	+270,80	+ 82,78	+110,55
-6	+220,66	+131,85	+192,30
-5	+176,87	+155,88	+248,89
-4	+139,08	+161,93	+284,14
-3	+106,87	+155,55	+301,71
-2	+ 79,81	+141,05	+305,09
-1	+ 57,45	+121,77	+297,43
0	+ 39,37	+100,17	+281,51
+1	+ 25,18	+ 78,06	+259,72
+2	+ 14,49	+ 56,74	+234,11
+3	+ 6,97	+ 37,09	+206,41
+4	+ 2,30	+ 19,71	+178,06
+5	+ 0,21	+ 4,94	+150,25
+6	+ 0,44	- 7,02	+123,94
+7	+ 2,77	- 16,11	+ 99,92
+8	+ 7,00	- 22,35	+ 78,81

Man kann nun wie im Fall freier Grenzebenen schließen, daß bis auf die Walzenströmung alle stationären Strömungen instabil sind. Denn die Nichtdiagonalelemente von $T_{\lambda\nu}$ sind auch für diese Randbedingungen größer als die Diagonalelemente, und die Diagonalelemente sind positiv.

Die Walzen stellen also den einzigen stationären Strömungstyp dar, zu dem keine exponentiell wachsenden Störungen existieren. Alle anderen Strömungsformen kann man sich nach Seite 11 aus Komponenten aufgebaut denken, die ebenfalls Walzen sind. Die explizite Berechnung der kritischen Störungen zeigt, daß unter eventuell anderen auch immer solche Störungen vorhanden sind, die bei Überlagerung mit der stationären Strömung eine Komponente anwachsen und alle anderen kleiner werden lassen. Die

Strömungsform hat also dann die Tendenz, in eine Walzenströmung überzugehen. Allerdings beschreiben die linearisirten Stabilitätsgleichungen nur diese Tendenz und nicht die wirkliche instationäre Entwicklung. Zwar können komplizirte Strömungsformen, zu denen mehrere kritische Störungen gehören, zunächst in andere Strömungen als Walzen übergehen, doch diese sind dann wiederum instabil, so daß der Endzustand der der Walzen sein wird.

Im exprimentell realisierbaren Fall der festen Grenzebenen können wir nun auch die für den Wärmetransport relevante Größe $N_1^{\frac{1}{2}}R$ für einige einfache Strömungsformen angeben.

Walzen: $n=1$, $C_\nu^* C_\nu = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} N_1^{\frac{1}{2}} R = 331{,}079 - 1{,}117P + 3{,}940P^2$$

Zellen mit quadratischem Querschnitt: $n=2$, $C_\nu^* C_\nu = \frac{1}{4}$

$$\frac{1}{2} N_1^{\frac{1}{2}} R = 368{,}702 + 9{,}458P + 30{,}121P^2$$

Zellen mit regulär-sechseckigem Querschnitt: $n=3$, $C_\nu^* C_\nu = \frac{1}{6}$

$$\frac{1}{2} N_1^{\frac{1}{2}} R = 422{,}997 + 11{,}736P + 32{,}128P^2$$

Der durch Konvektion bedingte Wärmestrom ist in dimensionsloser Form

$$\overline{H_z} = \left[\overline{\hat{u}_z \hat{\Theta}} - \partial_z \overline{\hat{\Theta}} \right] \frac{R - R_c}{R}$$

Da $\overline{H_z}$ nicht von z abhängt, ist

$$\overline{\hat{u}_z \hat{\Theta}} - \partial_z \overline{\hat{\Theta}} = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \left[\overline{\hat{u}_z \hat{\Theta}} - \partial_z \overline{\hat{\Theta}} \right] dz = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \overline{\hat{u}_z \hat{\Theta}}\, dz = N_1$$

Unsere numerische Rechnung für feste Schichtbegrenzungen ergab den Wert

$$N_1^{\frac{1}{2}} = 946{,}724.$$

Zusammenfassung

Bis auf die einfach-periodische Walzenströmung haben sich alle stationären Lösungen als instabil erwiesen. Das beim Experiment oft beobachtete Sechseckzellmuster konnte nicht erklärt werden. Man muß folgern, daß die von allen Autoren bisher benutzten Gleichungen (4) das Konvektionsproblem bei endlicher Amplitude i.a. nicht richtig beschreiben. Kritik zu üben ist vor allem an der inkonsequenten Berück-

sichtigung der Dichteänderung durch Temperaturerhöhung. Für infinitesimale Amplitude sind die linearisierten Gleichungen offenbar richtig, wie auch die gute Übereinstimmung der berechneten mit der gemessenen kritischen Rayleighzahl zeigt. Es ist anzunehmen, daß die nichtlinearen Gleichungen (4) dann wieder näherungsweise richtig sind, wenn die Amplitude so groß wird, daß die gemachte Vernachlässigung keine Rolle spielt. Allerdings müßte dann für die Anwendbarkeit der angegebenen Näherungsmethode eine hinreichend große Konvergenzstrecke der Entwicklung existieren.

Herrn Professor Dr. A. Schlüter, der mich in den Problemkreis dieser Arbeit einführte und mir in jeder Hinsicht wertvolle Unterstützung zuteil werden ließ, möchte ich an dieser Stelle recht herzlich danken. Herrn F. Busse danke ich für zahlreiche Diskussionen.

Literatur

[1] : Pellew, A. a. Southwell, R.V. Proc.Roy.Soc.A 176,312
[2] : Zierep J. Beitr.Phys.Atmosph.,Bd.31,31
[3] : Chandrasekhar S., Proc.Roy.Soc.A, 217,3o6
[4] : Malkus W.V.R. a. Veronis G., J.Fluid Mech.,4, 225
[5] : Busse F.,Diplomarbeit,Inst.f.theor.Phys.,Univ.München
[6] : Reid W.H. a. Harris D.L., Phys.Fluids,1, 1o2
[7] : Lortz D.,Diplomarbeit,Inst.f.theor.Phys.,Univ.München
[8] : Rellich F., Math.Annalen, 113, 6oo

Anhang

Der Beweis für die Integralrelationen

$$\left(\hat{u}_x^*, \hat{u}_j' \partial_j \hat{u}_x''\right) = 0, \quad \left(\hat{u}_y^*, \hat{u}_j' \partial_j \hat{u}_y''\right) = 0,$$
$$\left(\hat{u}_z^*, \hat{u}_j' \partial_j \hat{u}_z''\right) = 0, \quad \left(\hat{\Theta}^*, \hat{u}_j' \partial_j \hat{\Theta}''\right) = 0.$$

Die Mittelung wird über das Schichtvolumen durchgeführt. Die Striche sollen verschiedene x,y-Abhängigkeiten andeuten.

Den Beweis führen wir für die Entwicklungsfunktionen

$$\hat{u}_{x\nu} = i \frac{k_{x\nu}}{a^2} f' w_\nu, \quad \hat{u}_{y\nu} = i \frac{k_{y\nu}}{a^2} f' w_\nu, \quad \hat{u}_{z\nu} = f w_\nu, \quad \hat{\Theta}_\nu = g w_\nu$$

Er gilt dann auch für die superponierten Lösungen $\hat{u}_i$, $\hat{\Theta}$.

$$\left(\hat{u}_{x\nu}^*, \hat{u}_{j\mu} \partial_j \hat{u}_{x\varkappa}\right) = -i \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{k_{x\varkappa} k_{x\nu}}{a^2} f' \left[-i f'^2 \frac{(R_\mu R_\varkappa)}{a^2} + i f'' f \right] dz \; \overline{w_\nu^* w_\mu w_\varkappa}.$$

$\overline{w_\nu^* w_\mu w_\varkappa}$ ist nur von Null verschieden, wenn die Wellenzahlvektoren $R_\mu, R_\varkappa, -R_\nu$ sich zu Null ergänzen. Das ist der Fall, wenn sie hexagonal angeordnet sind. Dann ist

$$\frac{1}{a^2} (R_\mu, R_\varkappa) = -\frac{1}{2}$$

In diesem Fall liefert aber die z-Integration keinen Beitrag. Denn wegen $f(-\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) = 0$ ist

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f'' f' f \, dz = -\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f'' f' f \, dz - \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f'^3 dz = -\frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f'^3 dz$$

Analog läßt sich $\left(\hat{u}_{y\nu}^*, \hat{u}_{j\mu} \partial_j \hat{u}_{y\varkappa}\right) = 0$ zeigen.

Weiter gilt

$$\left(\hat{\Theta}_\nu^*, \hat{u}_{j\mu} \partial_j \hat{\Theta}_\varkappa\right) = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} g \left[-f' g \frac{(R_\mu R_\varkappa)}{a^2} + g' f \right] dz \; \overline{w_\nu^* w_\mu w_\varkappa}$$

Da auch g am Rand verschwindet, ist

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f g' g \, dz = -\frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f' g^2 dz.$$

Auch hier ergibt die z-Integration Null, wenn die x,y-Mittelung einen endlichen Beitrag liefert.

In $\left(\hat{u}_{z\nu}^*, \hat{u}_{j\mu} \partial_j \hat{u}_{z\varkappa}\right)$ treten die Integrationen über z immer in der Form

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f' f^2 dz$$

auf, ergeben also immer Null.

Zur Konvergenz der Störungsrechnung

Wir betrachten die nichtlinearen stationären Gleichungen

$$(1)\qquad \begin{aligned} P u_j \partial_j u_i &= -\partial_i \omega + \Theta \lambda_i + \Delta u_i \\ u_j \partial_j \Theta &= R u_j \lambda_j + \Delta \Theta \quad , \quad \partial_j u_j = 0 \end{aligned}$$

mit den für freie Begrenzungsebenen geltenden Randbedingungen

$$u_z = \frac{\partial^2}{\partial z^2} u_z = \Theta = 0 \qquad \text{für } z=0 \text{ und } z=1.$$

Das ungestörte Problem ist

$$(2)\qquad \begin{aligned} 0 &= -\partial_i \hat{\omega} + \hat{\Theta} \lambda_i + \Delta \hat{u}_i \\ 0 &= \overset{0}{R}\, \hat{u}_j \lambda_j + \Delta \hat{\Theta} \quad , \quad \partial_j \hat{u}_j = 0 \end{aligned}$$

mit dem Eigenwert $\overset{0}{R} = \overset{0}{R}_c = \frac{27}{4}\pi^4$

und der Eigenlösung

$$(3)\qquad \hat{u}_z = \sum_\nu C_\nu e^{i(\alpha_\nu, x)} \cdot \sin \pi z \,, \quad x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\alpha_\nu^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Delta_2 \hat{u}_x = -\partial_x \partial_z \hat{u}_z \,, \quad \Delta_2 \hat{u}_y = -\partial_y \partial_z \hat{u}_z \,, \quad \Delta_2 \hat{\Theta} = -\Delta^2 \hat{u}_z$$

Die C_ν seien so normiert, daß $\sum C_\nu^* C_\nu = 2$ ist. Dann ist

$$\| \hat{u}_z \| = 1 \,, \quad \| \hat{\Theta} \| = \frac{9}{2}\frac{\nu^2}{\pi^2}$$

wobei unter $\| \hat{u}_z \| = +\sqrt{(\hat{u}_z^*, \hat{u}_z)}$

die Norm verstanden werden soll.

Wir suchen Lösungen von (1) der Form

$$(4)\qquad \begin{aligned} u_i &= \varepsilon \overset{1}{u}_i + \varepsilon^2 \overset{2}{u}_i + \cdots \\ \Theta &= \varepsilon \overset{1}{\Theta} + \varepsilon^2 \overset{2}{\Theta} + \cdots \end{aligned}$$

zum Parameterwert

$$R = \overset{0}{R}_c + \varepsilon \overset{1}{R} + \varepsilon^2 \overset{2}{R} + \cdots$$

wobei die $\overset{n}{u}_i$, $\overset{n}{\Theta}$, $\overset{n}{R}$ (n=2,3,4,...) sukzessiv aus den inhomogenen Gleichungen

$$(5)\qquad \begin{aligned} f_{1i} &= P \sum_{\nu=1}^{n-1} \overset{\nu}{u}_j \partial_j \overset{n-\nu}{u}_i = -\partial_i \overset{n}{\omega} + \overset{n}{\Theta} \lambda_i + \Delta \overset{n}{u}_i \\ f_2 &= \sum_{\nu=1}^{n-1} \left(\overset{\nu}{u}_j \partial_j \overset{n-\nu}{\Theta} - \overset{\nu}{R}\, \overset{n-\nu}{u}_j \lambda_j \right) = \overset{0}{R}_c \overset{n}{u}_j \lambda_j + \Delta \overset{n}{\Theta} \end{aligned}$$

berechnet werden.

Die Elimination ergibt für $\overset{n}{u}_z$ allein die Gleichung

$$D_1 \overset{n}{u}_z = -\Delta_2 f_2 + \Delta\, \partial_z \partial_\kappa f_{1\kappa} + \Delta^2 f_{1z}$$

oder

$$(6)\quad D_1 \overset{n}{u}_z = -\Delta_2 f_2 + \Delta_2 \Delta f_{1z} - \Delta\, \partial_z (\partial_x f_{1x} + \partial_y f_{1y})$$

mit $\quad D_1 = \Delta^3 - \overset{0}{R}_c \Delta_2$

Aus der Relation $\quad \partial_y f_{1x} = \partial_x f_{1y}$

kommt man zu

$$(7)\quad \Delta_2 \overset{n}{u}_x = -\partial_x \partial_z \overset{n}{u}_z\,, \quad \Delta_2 \overset{n}{u}_y = -\partial_y \partial_z \overset{n}{u}_z\,,$$

was sich durch vollständige Induktion leicht beweisen läßt.

Differenzieren wir (6) nach x und z bzw. y und z, so führt uns (7) auf die Gleichungen

$$(8)\quad D_1 \overset{n}{u}_x = \partial_x \partial_z f_2 - \Delta\, \partial_x \partial_z f_{1z} - \Delta\, \partial_z \partial_z f_{1x} \qquad \text{bzw.}$$

$$(9)\quad D_1 \overset{n}{u}_y = \partial_y \partial_z f_2 - \Delta\, \partial_y \partial_z f_{1z} - \Delta\, \partial_z \partial_z f_{1y}$$

Für spätere Abschätzungen benötigen wir die Ungleichungen

$$(10)\quad \| D_2 \overset{n}{u}_i \| \le K_1 \| D_1 \overset{n}{u}_i \|$$

worin der Operator $D_2 = \Delta^2 (\partial_x + \partial_y + \partial_z)$ ist und K_1 eine von n unabhängige positive Zahl, die für jede ungestörte Eigenlösung einen bestimmten festen Wert besitzt.

An der Gestalt der Inhomogenitäten f in (5) erkennt man, daß die Lösungen n-ter Ordnung die Form

$$(11)\quad \overset{n}{u}_z = \sum_{\ell \nu} B_{\nu \ell}\, e^{i\pi (\overset{n}{R}_\nu, r)} \sin \ell \pi z$$

haben. Die Wellenzahlvektoren $\overset{n}{R}_\nu$ entstehen aus den R_ν von (3) nach der Gleichung

$$\overset{n}{R}_\nu = \sum_{i=1}^{n} R_{\nu_i}$$

wobei jeder Vektor R_{ν_i} die Menge der R_ν von (3) durchläuft.

Die Ungleichung (10) ist bewiesen, wenn sich zeigen läßt, daß es eine feste positive Zahl K_2 gibt, mit der

$$(\overset{n}{R}_\nu^2 + \ell^2)^4 [(\overset{n}{R}_{\nu x} + \overset{n}{R}_{\nu y})^2 + \ell^2] \le K_2 [(\overset{n}{R}_\nu^2 + \ell^2)^3 - \tfrac{27}{4} \overset{n}{R}_\nu^2]^2.$$

Benutzt man die Ungleichung

$$(\overset{n}{R}_{\nu x} + \overset{n}{R}_{\nu y})^2 \le 2 (R_{\nu x}^2 + R_{\nu y}^2) = 2 \overset{n}{R}_\nu^2\,,$$

so ist

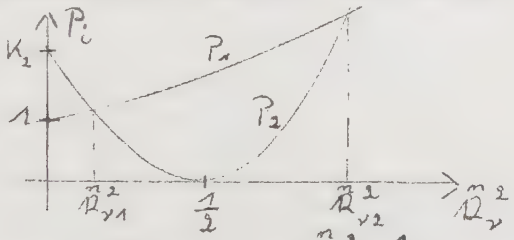
$$(12)\quad (\overset{n}{R}_\nu^2 + \ell^2)^4 (2 \overset{n}{R}_\nu^2 + \ell^2) \le K_2 [(\overset{n}{R}_\nu^2 + \ell^2)^3 - \tfrac{27}{4} \overset{n}{R}_\nu^2]^2$$

zu zeigen.

Im Fall $l \geq 2$ zeigt der Koeffizientenvergleich, daß die Ungleichung mit $K_2 \geq 1$ für alle reellen Werte $\vec{\mathcal{R}}_\nu^2$ erfüllt ist. Zu untersuchen bleibt noch der Fall l=1.
Die Polynome

$$P_1(\vec{\mathcal{R}}_\nu^2) = (\vec{\mathcal{R}}_\nu^2+1)^4(2\vec{\mathcal{R}}_\nu^2+1)$$
$$P_2(\vec{\mathcal{R}}_\nu^2) = K_2\left[(\vec{\mathcal{R}}_\nu^2+1)^3 - \frac{17}{4}\vec{\mathcal{R}}_\nu^2\right]^2$$

haben den gezeichneten qualitativen Verlauf.



Die Ungleichung (12) wäre für $\vec{\mathcal{R}}_\nu^2 = \frac{1}{2}$ nicht erfüllt. Hier kommt uns aber die auf Seite 7 erwähnte Bedingung

$$(\vec{u}_z, \vec{\Theta}_\lambda) = 0$$

zu Hilfe, in der $\vec{\Theta}_\lambda$ alle Lösungen $\vec{\Theta}$ des homogenen Systems (2) durchläuft. Dadurch wird gerade der Anteil der Lösung n-ter Ordnung bestimmt, der von dem zu dem inhomogenen System (5) gehörigen homogenen Gleichungssystem herrührt. Im Fall l=1 kommt also der Wert $\vec{\mathcal{R}}_\nu^2 = \frac{1}{2}$ nicht vor, weil der zugehörige Koeffizient $B_{\nu 1}=0$ ist.
Die Konstante K_2 wird nun so groß gewählt, daß zwischen den Schnittpunktsabszissen $\vec{\mathcal{R}}_{\nu 1}^2$, $\vec{\mathcal{R}}_{\nu 2}^2$ kein Wert $\vec{\mathcal{R}}_\nu^2$ liegt. Dies ist wenigstens für Zellen mit rechteckigem und regulär-sechseckigem Querschnit sowie für Walzen möglich. Denn bei diesen periodischen Lösungen lassen sich aus den $\mathcal{R}_\nu$ durch Linearkombination mit ganzrationalen Koeffizienten nur endlich viele Vektoren bilden, deren Betrag zwischen 0 und 1 liegt.
Da die Funktionen $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ aus $\vec{u}_z$ durch Differentiation gewonnen werden, ist für diese die Ungleichung (1o) ebenfalls bewiesen.
Wegwn der Darstellung (11) gelten für $\vec{u}_i$, $\vec{\Theta}$, f die Ungleichungen

$$\pi\|\partial_x f\| \leq \|\partial_x \partial_z f\| \leq \|\Delta f\|,$$
$$\pi\|\partial_y f\| \leq \|\partial_y \partial_z f\| \leq \|\Delta f\|,$$
$$\|\Delta_2 f\| \leq \|\Delta f\|, \quad \|f\| \leq \|\Delta f\| \quad \text{u.s.w.},$$

so daß man aus (6), (8), (9) und (1o) erhält

$$\frac{1}{\kappa_1}\|D_2 u_i\| \le \|D_1 u_i\| \le \|\Delta^2 f_2\| + \|\Delta^2 f_{1x}\| + \|\Delta^2 f_{1y}\| + \|\Delta^2 f_{1z}\|.$$

Aus der skalaren Gleichung von (5) schätzen wir $\|\vec{\Theta}\|$ ab, indem wir $\Delta(\partial_x + \partial_y + \partial_z)$ anwenden.

$$\|D_2 \vec{\Theta}\| \le \mathring{R}_c \|D_2 \vec{u}_z\| + \|\Delta^2 f_2\|$$

Die Eigenwertstörung $\vec{R}$ wird aus der Lösbarkeitsbedingung

$$\mathring{R}_c(\hat{u}_i, f_{1i}) + (\vec{\Theta}, f_2) = 0$$

für die Gleichungen (5) berechnet. Setzen wir

(13) $$f_2 + \vec{R}\,\hat{u}_z = \bar{f}_2$$

so kommt $\vec{R}$ in $\bar{f}_2$ nicht vor.

$$(\hat{u}_z, \hat{\Theta})\vec{R} = \mathring{R}_c(\hat{u}_i, f_{1i}) + (\hat{\Theta}, \bar{f}_2),$$

$$|\vec{R}| \le \kappa_3 [\|\Delta^2 f_{1x}\| + \|\Delta^2 f_{1y}\| + \|\Delta^2 f_{1z}\| + \|\Delta^2 \bar{f}_2\|]$$

und mit (13)

$$\|\Delta^2 f_2\| \le \kappa_4 \{|\vec{R}| + \|\Delta^2 \bar{f}_2\|\} \le \kappa_5 [\sum_{i=1}^{3} \|\Delta^2 f_{1i}\| + \|\Delta^2 \bar{f}_2\|]$$

Wir finden schließlich eine positive Konstante K, mit der gilt

$$\left.\begin{matrix} \|D_2 \vec{u}_i\| \\ \|D_2 \vec{\Theta}\| \\ |\vec{R}| \end{matrix}\right\} \le K [\sum_{i=1}^{3} \|\Delta^2 f_{1i}\| + \|\Delta^2 \bar{f}_2\|$$

Die in den Ausdrücken $\Delta^2 f$ vorkommenden Funktionen lassen sich der Norm nach durch eine der vier Funktionen $D_2 \vec{u}_x, \ldots$ abschätzen.

So kommt man zu dem Ergebnis, daß für die durch die Rekursionsformel

$$q_n = K(q_1 q_{n-1} + \cdots + q_{n-1} q_1)$$

bestimmten q_n die Ungleichungen

$$|\vec{u}_i\| \le \|D_2 u_i\| \le q_n, \quad \|\vec{\Theta}\| \le q_n, \quad |\vec{R}| \le q_n, \quad n = 2, 3, \ldots$$

gelten, wenn man nur dafür sorgt, daß der Wert q_1 genügend groß ist.

Ähnlich wie in [8] läßt sich die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ durch eine geometrische Reihe majorisieren, womit gezeigt ist, daß für die genannte Klasse von Lösungsfunktionen die Entwicklung (4) der Norm nach konvergiert.

Lebenslauf

In Massen / Niederlausitz wurde ich am 8. August 1935 geboren. Ich besuchte von Herbst 1941 bis Kriegsende die Massener Dorfschule. Die höhere Schule begann ich Ostern 1947 in Itzehoe / Holstein. Von 1950 an war ich für ein Jahr in St. Peter / Nordsee im Internat. Den Rest meiner Schulzeit absolvierte ich auf dem Realgymnasium in Rendsburg, wo ich Ostern 1956 die Reifeprüfung ablegte.
Ich begann im SS 1956 an der Universität Kiel das Studium der Physik und legte dort im Mai 1958 die Diplomvorprüfung für Physiker ab. Vom WS 1958/59 an belegte ich in München für das Doppelstudium Physik und Volkswirtschaft und unterzog mich im November 1960 der Diplomhauptprüfung für Physiker. Seit dieser Zeit verwalte ich an der Münchner Universität zusammen mit einem Kollegen eine Assistentenstelle im Institut für Theoretische Physik.